

УДК 621.395

СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Н.Е. Поборчая, доцент МТУСИ, к.т.н.

Введение. В настоящее время продолжают интенсивно развиваться цифровые системы связи, в которых для восстановления переданной информации необходимы устройства тактовой и фазовой синхронизации. Рассмотрим задачу оценивания в дискретном времени параметров случайного сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного шума с неизвестным законом распределения.

Существуют три основных подхода к оцениванию сигнальных параметров: с помощью метода максимального правдоподобия (МП), по правилу максимума апостериорной вероятности (МАВ) и с использованием фильтрации. Применить методы МП и МАВ в условиях априорной неопределенности относительно законов распределения шумов весьма затруднительно, а время сходимости алгоритмов фильтрации может превышать время наблюдения сигнала. Поэтому в данной работе предложен подход, основанный на методе решения системы нелинейных уравнений, использующем теорию вариационного исчисления. Метод позволяет производить оценки при ограниченной выборке наблюдаемого сигнала и не требует знания плотности вероятности шума.

Постановка задачи. Пусть после снятия несущей на вход приемного устройства поступают квадратурные составляющие сигнала, модулированного непрерывной фазой (МНФ-сигнала) z_{ic}, z_{is} , наблюдаемые на фоне белого аддитивного шума μ_{ic}, μ_{is} с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_μ^2 [1]:

$$y_{ic} = z_{ic} + \mu_{ic}; y_{is} = z_{is} + \mu_{is};$$

$$z_{is} = A \sin(\Delta\omega i + 2\pi h \sum_{k=1}^n I_k q(\Delta ti - (k-1)T - \tau_i) + \varphi_i);$$

$$z_{ic} = A \cos(\Delta\omega i + 2\pi h \sum_{k=1}^n I_k q(\Delta ti - (k-1)T - \tau_i) + \varphi_i),$$

где i — дискретное время; A — известная амплитуда сигнала; $\Delta\omega = 2\pi\Delta f\Delta t$; Δf — частота, оставшаяся от снятия несущей; Δt — шаг дискретизации; I_k — информационная последовательность, заданная в виде псевдослучайной последовательности; T — длительность символа; h — индекс модуляции; $\varphi_i = \varphi_{\tau_i} - 2\pi f_c \tau_i$ — фаза, обусловленная фазами генераторов на передающей и приемной стороне φ_{τ_i} и задержкой в канале распространения τ_i ; f_c — частота несущей; τ_i — задержка сигнала, возникающая при работе генератора тактовой синхронизации; $q(t) = \int_0^t g(\alpha) d\alpha$ — сигнальная функция; $g(t)$ — форма импульса; $(n-1)T \leq \Delta ti - \tau_i \leq nT$; $n = \overline{1, m}$, $m = \frac{T_0}{T}$, T_0 — время наблюдения.

Введем ограничения:

- 1) за время наблюдения T_0 значения $\varphi_i = \varphi = \text{const}$, $\tau_i = \tau = \text{const}$;
- 2) $\Delta f = 0$;
- 3) последовательность символов I_k известна;
- 4) $\Delta t = T$, т.е. взят один отсчет на импульс.

Требуется по выборке $\mathbf{Y}_m = (y_{ms} \dots y_{1s} y_{mc} \dots y_{1c})^T$, где T — оператор транспонирования, найти оценку вектора $\mathbf{X} = (\varphi, \tau)^T$ при условии

$$\frac{\|\mu\|^2}{2m-1} = \sigma_\mu^2. \tag{1}$$

Здесь $\mu = (\mu_{ms} \dots \mu_{1s} \mu_{mc} \dots \mu_{1c})^T$; $\|\bullet\|$ — евклидова норма.

Решение задачи. Алгоритм оценивания фазы и задержки сигнала будем искать в классе рекуррентных процедур.

Рассмотрим модель:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_l = \mathbf{X}_{l-1} + \zeta_l; \\ \mathbf{Y}_m = \mathbf{S}(\mathbf{X}_l) + \mu, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{X}_l = (\varphi_l, \tau_l)^T$; $l = \overline{1, M}$ — номер шага итерации; ζ_l — регуляризирующий белый шум с нулевым вектором средних значений размером 2×1 и ковариационной матрицей $\mathbf{B} = \sigma_\zeta^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}$; $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ — единичная матрица размером 2×2 , причем $\sigma_\zeta^2 \rightarrow 0$;

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}_l) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_s(\mathbf{X}_l) \\ \mathbf{S}_c(\mathbf{X}_l) \end{pmatrix}$$

— нелинейная вектор-функция наблюдений;

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{X}_l) = \begin{pmatrix} z_{ms} \\ \vdots \\ z_{1s} \end{pmatrix}_{m \times 1}; \quad \mathbf{S}_c(\mathbf{X}_l) = \begin{pmatrix} z_{mc} \\ \vdots \\ z_{1c} \end{pmatrix}_{m \times 1}.$$

Для линеаризации уравнения наблюдений разложим функцию $\mathbf{S}(\mathbf{X}_l)$ в ряд Тейлора в точке оценки $\hat{\mathbf{X}}_{l-1}$, ограничившись для простоты линейным приближением [3]. Тогда получим:

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}_l) \approx \mathbf{D}_{l-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l),$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_l) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_l \end{pmatrix}_{3 \times 1}; \quad \mathbf{D}_{l-1} = (\mathbf{d}_{l-10} \quad \mathbf{d}_{l-11})_{2m \times 3};$$

$$\mathbf{d}_{l-10} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{X}}_{l-1}) - \mathbf{S}'(\hat{\mathbf{X}}_{l-1}) \hat{\mathbf{X}}_{l-1}; \quad \mathbf{d}_{l-11} = \mathbf{S}'(\hat{\mathbf{X}}_{l-1});$$

$$\mathbf{S}'(\hat{\mathbf{X}}_{l-1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}'_s(\hat{\mathbf{X}}_{l-1}) \\ \mathbf{S}'_c(\hat{\mathbf{X}}_{l-1}) \end{pmatrix}_{2m \times 2}$$

— первая производная функции $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{X}}_{l-1})$ в точке $\hat{\mathbf{X}}_{l-1}$.

Далее возьмем оператор $\mathbf{F}(\bullet)$ от левой и правой частей верхнего уравнения модели (2) и разложим его в ряд Тейлора до первого приближения в точке \mathbf{X}_{l-1} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_l) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{l-1} + \zeta_l) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}_{l-1}) + \mathbf{W}\zeta_l,$$

где $\mathbf{W} = \mathbf{F}'(\mathbf{X}_{l-1})$ — первая производная функции $\mathbf{F}(\bullet)$ в точке \mathbf{X}_{l-1} .

Обозначим $\mathbf{f}_l = \mathbf{F}(\mathbf{X}_l)$. Учитывая проделанные выше действия, перейдем от (2) к приближенной линейризованной относительно переменной \mathbf{f} модели:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_l = \mathbf{f}_{l-1} + \mathbf{W}\zeta_l, \mathbf{X}_l = \mathbf{L}\mathbf{f}_l, \mathbf{L} = (\mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{I}_{2 \times 2}); \\ \mathbf{Y}_m = \mathbf{D}_{l-1}\mathbf{f}_l + \mu. \end{cases} \quad (3)$$

Оценку вектора \mathbf{f} будем искать по критерию

$$\sum_{j=1}^l \|\mathbf{f}_j - \hat{\mathbf{f}}_{j-1}\|_{\mathbf{P}_j}^2 = \min_{\hat{\mathbf{f}}_j}. \quad (4)$$

С учетом условия (1), оно соответствует

$$\frac{\|\mathbf{Y}_m - \mathbf{S}(\mathbf{X}_l)\|^2}{2m-1} = \sigma_\mu^2.$$

В результате имеем функционал [2]:

$$M_l(\hat{\mathbf{f}}_0, \dots, \hat{\mathbf{f}}_{l-1}, \mathbf{f}_l) = \sum_{j=1}^l \left[\|\mathbf{f}_j - \hat{\mathbf{f}}_{j-1}\|_{\mathbf{P}_j}^2 + \lambda_j \|\mathbf{Y}_m - \mathbf{D}_{j-1}\mathbf{f}_j\|_{\mathbf{Q}}^2 \right]. \quad (5)$$

Здесь $\|\bullet\|$ — евклидовы нормы с весами $\mathbf{P}_j^{-1}, \mathbf{Q}^{-1}$; \mathbf{P}_j — ковариационная матрица ошибок экстраполяции; $\mathbf{Q} = \sigma_\mu^2 \mathbf{I}_{2m \times 2m}$ — ковариационная матрица шумов наблюдения; λ_j — множитель Лагранжа.

Минимизируя (5), получим выражение для оценок [3, 4]:

$$\hat{\mathbf{X}}_l = \hat{\mathbf{X}}_{l-1} + \mathbf{L}\mathbf{K}_l(\mathbf{Y}_m - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{X}}_{l-1})), \quad l = \overline{1, M}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{K}_l = \mathbf{P}_l \mathbf{D}_{l-1}^T (\mathbf{D}_{l-1} \mathbf{P}_l \mathbf{D}_{l-1}^T + \frac{\mathbf{Q}}{\lambda_l})^{-1}; \quad \mathbf{P}_l = \mathbf{\Gamma}_{l-1} + \mathbf{W}\mathbf{W}^T \sigma_\zeta^2;$$

$$\mathbf{\Gamma}_l = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_l \mathbf{D}_{l-1}) \mathbf{P}_l (\mathbf{I} - \mathbf{K}_l \mathbf{D}_{l-1})^T + \mathbf{K}_l \mathbf{Q} \mathbf{K}_l^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_l \mathbf{D}_{l-1}) \mathbf{P}_{l-1} \mathbf{K}_l^T + \mathbf{K}_l \mathbf{P}_{l-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_l \mathbf{D}_{l-1})^T;$$

$$\mathbf{P}_{l-1} \mathbf{f}_\mu = E(\hat{\mathbf{f}}_{l-1} \mu^T) = \mathbf{K}_{l-1} \mathbf{Q} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{l-1} \mathbf{D}_{l-2}) \mathbf{P}_{l-2} \mathbf{f}_\mu;$$

\mathbf{I} — единичная матрица размером 3×3 ; E — оператор математического ожидания. Начальные условия: $\mathbf{P}_{0f\mu} = \mathbf{0}_{3 \times 2m}$; $\hat{\mathbf{X}}_0 = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_0 \\ \hat{\tau}_0 \end{pmatrix}$ — из априорных сведений.

Нахождение множителя Лагранжа λ_l состоит в решении уравнения

$$\frac{\|\mathbf{Y}_m - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{X}}_l, \lambda_l)\|^2}{2m-1} = \sigma_\mu^2.$$

Тогда

$$\lambda_l \approx \frac{\sqrt{2m} \sigma_\mu (\|\mathbf{Y}_m - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{X}}_{l-1})\| - \sigma_\mu)}{\|\mathbf{D}_{l-1} \mathbf{P}_l \mathbf{D}_{l-1}^T\|}.$$

Моделирование. Проведен эксперимент на ЭВМ для МНФ сигнала с полным откликом при следующих данных: $A=1, h=0,5, I_k = \pm 1$, форма импульса — прямоугольная, $m = 100, \sigma_\zeta^2 = 0, \phi = \pi/4 - 2\pi f_c \tau_s, f_c = 1807$ МГц, $\tau_s = 0,3125$ мкс, $\tau/T = 0,63$. Априорные данные на начальные значения оценок $\hat{\mathbf{X}}_0 = (\hat{\phi}_0, \hat{\tau}_0)^T$ отсутствуют. Для работы алгоритма (6) была использована следующая процедура: $3\hat{\tau}_0 = 0, \phi_0 = \{0; -\pi/2; -\pi; -\pi/2\}$. Далее при каждой паре начальных оценок $\hat{\phi}_0, \hat{\tau}_0$ получаем $\hat{\mathbf{X}}_l, l = \overline{1, M}$, затем рассчитываем значение функционала (5). В качестве результирующей оценки вектора $\hat{\mathbf{X}}_M$ выбирается тот, при котором (5) принимает наименьшее значение.

Работоспособность алгоритма (6) при разных отношениях сигнал/шум $q = 10 \ln(\frac{A^2}{2\sigma_\mu^2})$ показана на рис. 1, а ($g = 37$ дБ), 2, а (27 дБ), 3, а (17 дБ) — для гауссовских шумов и на рис. 1, б ($g = 37$ дБ), 2, б (27 дБ), 3, б (17 дБ) — для равномерно распределенных шумов наблюдения. Для расчета СКО по сигналу, фазе и задержке было проведено усреднение по реализациям:

$$cko(l) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N ckoz(l, s); \quad ckoz(l, s) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (z_s(s, i) - \hat{z}_s(s, i, l))^2};$$

$$cko\phi(l) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (\phi - \phi_{s,l})^2}, \quad cko\tau(l) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (\tau - \hat{\tau}_{s,l})^2},$$

где $N = 100$ — количество реализаций; $l = \overline{1, M}$ — номер шага итерации; i — дискретное время.

Обозначения на рисунках: cko — СКО по МНФ сигналу; $cko\phi 1, cko\phi 2$ — СКО по фазе $cko\phi(l)$ для алгоритма с множителем Лагранжа и без него ($\lambda = 1$) соответственно; $cko T1, cko T2$ — СКО по задержке $cko\tau(l)$.

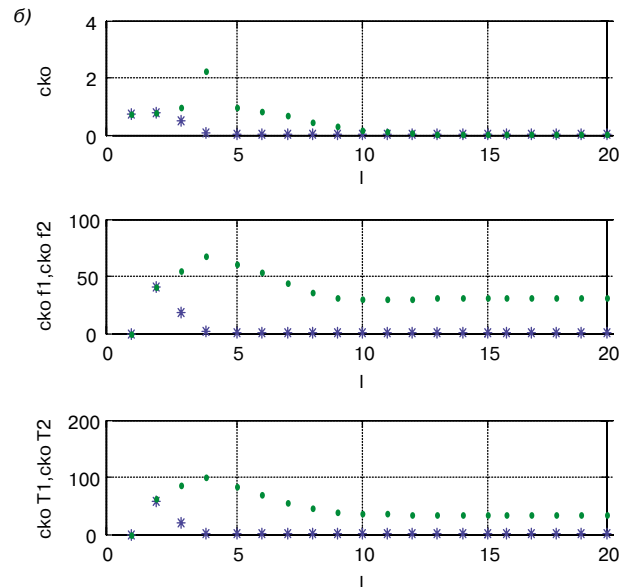
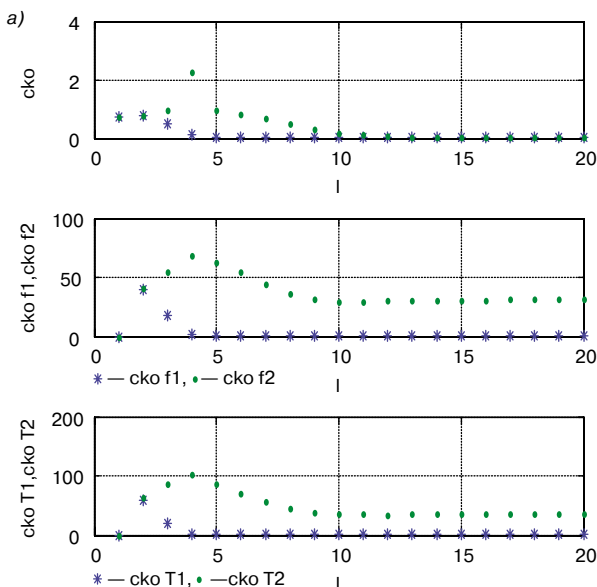


Рис. 1

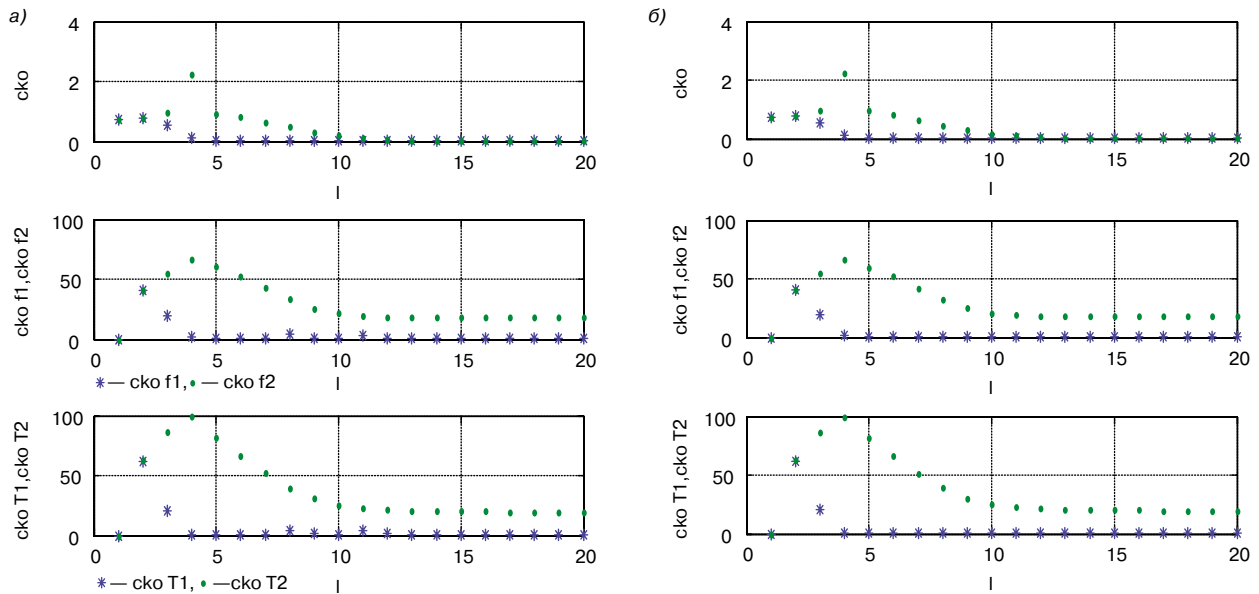


Рис. 2

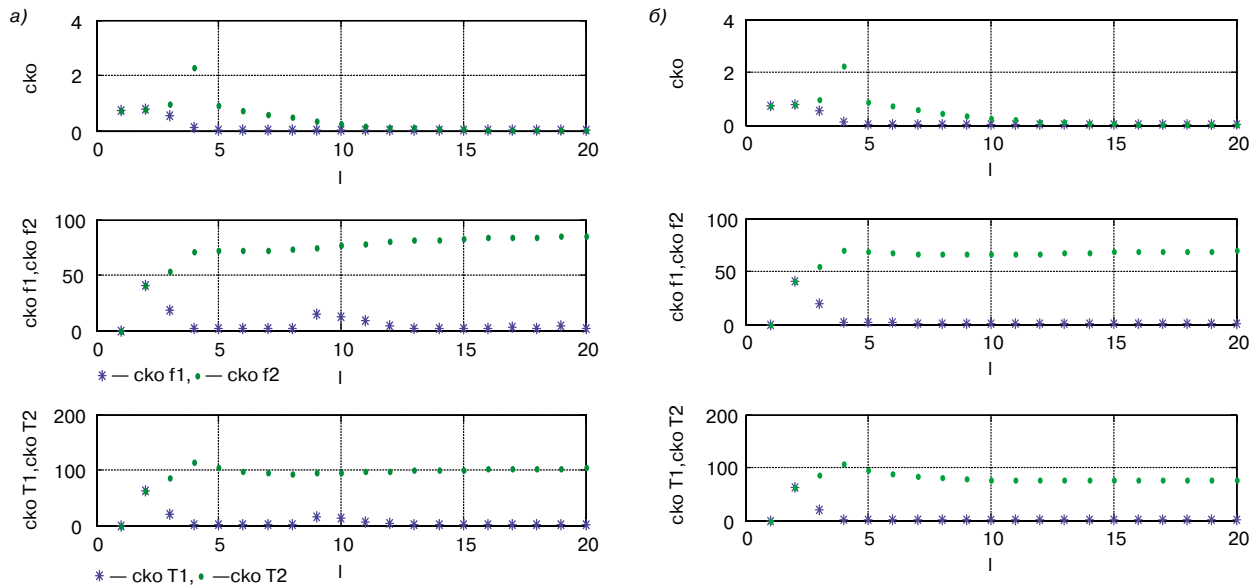


Рис. 3

Установившиеся значения СКО по фазе $ско\phi$ и по задержке ($\frac{ско\tau}{T}$, $T = 100$ дано в относительных единицах) для алгоритма (б) с множителем Лагранжа сведены в табл. 1, без множителя Лагранжа ($\lambda = 1$) в табл. 2 ($M = 20$).

Таблица 1

q , дБ	17	27	37
<i>Гауссовский закон распределения шумов наблюдения</i>			
$ско\phi$ (в градусах)	1,4549	0,4386	0,1412
$\frac{ско\tau}{T}$	0,011961	0,007779	0,008997
<i>Равномерный закон распределения шумов наблюдения</i>			
$ско\phi$ (в градусах)	1,0177	0,3201	0,0968
$\frac{ско\tau}{T}$	0,008976	0,007996	0,009295

Таблица 2

q , дБ	17	27	37
<i>Гауссовский закон распределения шумов наблюдения</i>			
$ско\phi$ (в градусах)	85,4555	17,9999	31,1535
$\frac{ско\tau}{T}$	1,037013	0,199394	0,347019
<i>Равномерный закон распределения шумов наблюдения</i>			
$ско\phi$ (в градусах)	69,4541	17,9831	31,1698
$\frac{ско\tau}{T}$	0,775404	0,199114	0,34707

Выводы. Синтезированный с помощью теории вариационного исчисления алгоритм (б) позволяет решать задачу оценивания фазы и задержки сигнала в условиях:

- априорной неопределенности относительно законов распределения шумов;
- ограниченных выборок. Решение аналогичной задачи методом нелинейной фильтрации приводит к увеличению времени наблюдения в несколько раз при одинаковой точности оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прокис Дж.** Цифровая связь / Пер. с англ. под ред. Д.Д. Кловского — М.: Радио и связь, 2000. — 800 с.
2. **Корни Г. и Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973. — 832 с.

3. **Шлома А.М.** О решении операторных уравнений при неполной информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1996. — Т. 36. №3. — С. 15—27.
4. **Шлома А.М., Смердова Н.Е.** Применение теории операторов функционального анализа для задач нелинейной фильтрации // Радиотехника и электроника. — 1999. — Т. 44. № 2. — С. 190—198.

Получено 21.03.08

УДК 621.396.62.019.4

ПОИСК АССОЦИАТИВНЫХ ПРАВИЛ ПРИ АНАЛИЗЕ ЗАГРУЗКИ СЕТЕЙ СОТОВОЙ СВЯЗИ

М.В. Терешонок, аспирант МТУСИ

Анализ загрузки сетей сотовой связи в целом является достаточно сложной задачей, состоящей из нескольких частных подзадач. Одна из таких подзадач — определение устойчивых групп абонентов. Под группой в данном случае подразумеваются два или более абонента, совершающие совместные перемещения по городу. Данная задача, в известном смысле, аналогична задаче поиска ассоциативных правил. Поэтому были исследованы вопросы применения алгоритмов поиска ассоциативных правил для определения устойчивых групп абонентов сетей сотовой связи.

Постановка задач. Целью поиска ассоциативных правил является нахождение закономерностей между связанными событиями в базах данных. Множество произошедших одновременно событий принято называть транзакцией. Транзакционная или операционная база данных представляет собой двумерную таблицу, которая содержит номер транзакции и список событий, произошедших во время этой транзакции. Номер транзакции — уникальный идентификатор, определяющий транзакцию.

Ассоциативное правило имеет вид: «Из события А следует событие В». Оно устанавливает закономерность следующего вида: «Если в транзакции встретился набор элементов А, то можно сделать вывод, что в этой же транзакции должен появиться набор элементов В».

Основными характеристиками ассоциативного правила являются поддержка и достоверность правила. Правило «Из события А следует событие В» имеет поддержку P , если $P\%$ транзакций из всего набора содержат одновременно наборы элементов А и В. Достоверность этого правила показывает, какова вероятность того, что из события А следует событие В. Правило «Из А следует В» справедливо с достоверностью C , если $C\%$ транзакций из всего множества, содержащих набор элементов А, также содержат набор элементов В.

С помощью алгоритмов поиска ассоциативных правил можно получить все возможные правила вида: «Из А следует В» с различными значениями поддержки и достоверности. Однако в большинстве случаев количество правил необходимо ограничивать заранее установленными минимальными и максимальными значениями поддержки и достоверности.

Правила с очень большими значениями поддержки и достоверности могут оказаться очевидными и хорошо известными. С другой стороны, правила с низкими их значениями могут оказаться в большей части необоснованными. Таким образом, необходимо определить такой интервал («золотую середину»), который, с одной стороны, обеспечит нахождение неочевидных правил, а с другой — их обоснованность.

Алгоритм поиска ассоциативных правил. Проведенный анализ различных алгоритмов поиска ассоциативных правил выявил наиболее эффективный на сегодняшний день алгоритм Apriori [1—3]. Приведем данный алгоритм в приложении к задаче поиска устойчивых групп абонентов мобильной связи.

Будем рассматривать так называемые события x_j , представляемые, например, в виде чисел. Пусть есть некоторое количество транзакций $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, где каждая транзакция T_i — некоторый набор событий $X^i = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, произошедших одновременно ($i = 1..n, m$, — количество событий в i -й транзакции, n — количество транзакций). Общее число различных событий во всех рассматриваемых транзакциях равно M .

Требуется найти правила типа: «Если в транзакции встретился набор элементов А, то можно сделать вывод, что в этой же транзакции должен появиться набор элементов В».

Алгоритм Apriori состоит из следующих шагов:

1. Формирование одноэлементных наборов и расчет поддержки этих наборов. Одноэлементным набором называется набор, содержащий только одно событие. Число таких наборов равно M . Под поддержкой одноэлементного набора понимается следующая величина:

$$P(x_j) = \frac{N(x_j)}{n}, \quad (1)$$

где $N(x_j)$ — количество транзакций, в которых встречается одноэлементный набор x_j .

2. Отбраковка одноэлементных наборов по заданному порогу поддержки P_{\min} . Если $P(x_j) < P_{\min}$, то набор событий x_j в дальнейшей работе алгоритма не используется. Данное пра-