

УДК 681.335.2

## ТРОИЧНЫЕ КАСКАДНЫЕ КОДЫ С МОДУЛЯЦИЕЙ КАМ-9 И ИХ ВОЗМОЖНОСТИ

В.С. Кузнецов, профессор МИЭТ, д.т.н.

**Введение.** Теорема Шеннона для пропускной способности непрерывного гауссовского канала опубликована более 60 лет назад [1]. Согласно этой теореме, применяя достаточно сложную систему кодирования (при доказательстве теоремы использовано случайное кодирование), можно передавать двоичную информацию со скоростью

$$C = \frac{\log_2 M}{T} \leq W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N} \right), \text{ бит/с,}$$

со сколь угодно малой частотой ошибок.

Теорема сформулирована для сигналов со средней мощностью  $P$ , при наличии в канале помехи в виде аддитивного белого гауссовского (теплового) шума (АБГШ) с мощностью  $N$  в полосе частот  $W$  и при достаточно большой длительности  $T$  сигнала. С тех пор, начиная с Хэмминга (1950 г.) и Голя (1954 г.), многие ученые-математики и специалисты в области связи пытались предложить разные по сложности конструкции помехоустойчивого кодирования (ПК), приближающиеся к границе Шеннона. Однако до сегодняшнего дня код Шеннона не найден, что составляет основную нерешенную проблему ПК.

Для оценки современных достижений в области ПК автор воспользовался исследовательской секцией web-сайта JPL [2], на котором представлены наиболее важные результаты различных авторов и компаний в области ПК. В табл. 1 приводятся два помехоустойчивых кода из [2] с наименьшими от-

ношениями  $\beta = E_b/N_0$  расхода энергии на бит к односторонней спектральной плотности мощности шума  $N_0$ , равными 0,23 дБ (код E) и 0,05 дБ (код H1) при блоковой вероятности ошибки декодирования  $Q_{\text{ош}} = 10^{-4}$ . Эти коды при блоковых длинах  $n_E = 49152$  и  $n_{H1} = 24000$  отстоят от границы плотнейшей поверхностно-сферической укладки (ППСУ), соответственно, на 0,63 и 0,52 дБ. При одинаковой частотной эффективности  $R/F$  с границей Шеннона (блоковая длина  $n \rightarrow \infty$ ) эти коды отстоят от нее, соответственно, на 0,789 и 0,867 дБ.

**Пропускная способность непрерывного АБГШ-канала.** Согласно Шеннону [1] пропускная способность канала с АБГШ

$$C = f(W, P, N) \leq W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N} \right), \text{ бит/с,} \quad (1)$$

где  $W$  — максимальная частота в спектре передаваемого сообщения,  $P$  — средняя мощность передатчика,  $N$  — мощность белого шума в полосе частот  $W$ .

Определим пропускную способность непрерывного канала с АБГШ с полной средней мощностью сигнала  $P = 2P_I = 2P_Q$ , где  $P_I$  и  $P_Q$  — ортогональные компоненты двумерного сигнала (символа) со средней мощностью шума  $N = \sigma^2 = N_0 W$  в полосе частот  $W = F_I = F_Q = F$  ( $F_I$  и  $F_Q$  — полосы частот квадратурных каналов демодулятора). Таким образом, при принятых допущениях полоса частот  $W = F$ , где  $F$  — информационная полоса, численно равная полосе частот квадратурных каналов, причем АЧХ УПЧ приемника имеет прямоугольную форму.

Таблица 1

Параметры кода ( $n, k$ )	Тип кода	$\beta = E_b/N_0$ , дБ, при $Q_{\text{ош}} = 10^{-4}$	$R/F$ , бит/(с·Гц)	$\Delta\beta_{\text{ППСУ}} = \beta - \beta_{\text{ППСУ}}$ , дБ	$\Delta\beta_{\text{Ш}} = \beta - \beta_{\text{Ш}}$ , дБ
E(49152, 16243)	Асимптотический турбокод	0,23	0,661	0,63	0,789
H1(24000, 6000)	Код с низкой плотностью проверок на четность	0,05	0,5	0,52	0,867

Тогда пропускная способность непрерывного канала с АБГШ

$$C = f(W, P, N) \leq F \log_2 \left( 1 + \frac{2P_I}{N_0 F} \right) = F \log_2 \left( 1 + \frac{2R_I \beta}{F} \right). \quad (2)$$

Для квадратурных каналов  $\beta_I$  и  $\beta_Q$  совпадают с отношением общего расхода энергии на бит к  $N_0$ , т. е.

$$\beta_I = \frac{E_I}{N_0 k_I} = \frac{2E_I}{N_0 2k_I} = \frac{E_\Sigma}{N_0 k_\Sigma} = \beta.$$

С учетом этих соотношений для непрерывного канала с АБГШ из (2) получим

$$\beta \geq \frac{2^{C/F} - 1}{2R_I / F} = \frac{2^{2R_I / F} - 1}{2R_I / F} = \frac{2^{4k/n} - 1}{4k/n}, \quad (3)$$

так как для системы с ПК  $R_I / F = 2k/n$ , где  $k$  и  $n$  — соответственно число бит и длина блока ПК в квадратурном канале. Полагаем, что одинаковые коды ПК размещаются в каждом квадратурном канале  $I$  и  $Q$  (рис. 1).

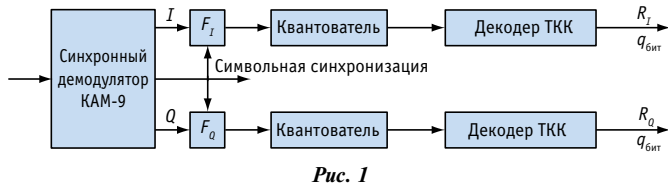


Рис. 1

Выражение (3) определяет требуемое минимальное отношение  $E_b/N_0$  в АБГШ-канале. Приемная часть системы имеет два статистически независимых выходных квадратурных канала с суммарной скоростью передачи  $2R_I$ , выбираемой равной (но не более) пропускной способности АБГШ-канала, т. е. при  $2R_I = C$ . При этом частотная эффективность использования канала составляет  $C/F = 2R_I/F$ .

При выборе двумерной модуляции КАМ-9 с применением двух выходных квадратурных каналов реализуемая частотная эффективность использования АБГШ-канала в 2 раза превышает частотную эффективность канала с модуляцией КАМ-3 (символы  $0, \pm a$ ).

**Троичные каскадные помехоустойчивые коды.** В [3] описан класс троичных каскадных кодов (ТКК) с символами  $\{0, \pm a\}$ , который является произведением двоичного максимального корректирующего подкода (КП) с символами  $\{\pm 1\}$  и двоичного каскадного равновесного подкода (РП) с символами  $\{0, a\}$ , причем КП передается на энергонесущих позициях РП. На рис. 2 показана структура троичного биортого-

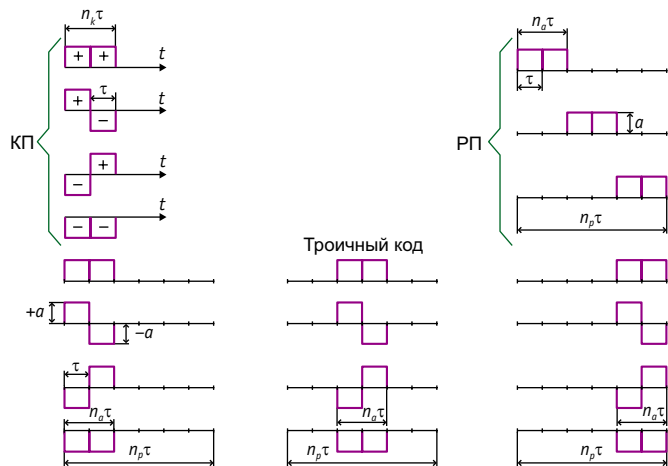


Рис. 2

нального кода с параметрами: длина кодового слова  $N = n_p = 6$ , число энергонесущих символов в кодовом слове  $n_a = 2$ , объем кода  $M = M_k M_p = 4 \cdot 3$ ; евклидовы расстояния: в РП —  $D_p = \sqrt{a^2 d_{xp} \tau} = \sqrt{a^2 4\tau}$ , в КП —  $D_k = \sqrt{4a^2 d_{xk} \tau} = \sqrt{4a^2 \tau}$ , в троичном коде —  $D = D_p = D_k$ , откуда  $d_{xp} = 4d_{xk}$ , где  $d_{xp} = 4$ ,  $d_{xk} = 1$ . Обозначим коды кратким наименованием КП ( $N_k, K_k, D_{xk}$ ), где в круглых скобках приведены их параметры:  $N_k$  — длина кодового слова КП,  $K_k$  — число бит в кодовом слове КП ( $K_k = \log_2 M_k$ ),  $D_{xk}$  — хэммингово расстояние КП.

Равновесный подкод в [3] представлен каскадным кодом первого порядка. Внешним является  $q$ -ичный код Рида-Соломона РС( $N_{pc}, K_{pc}, D_{xpc}$ ), внутренним — максимальный двоичный равновесный код В( $n_p, n_a, d_{xp}, V_p$ ). В итоге РП( $N_p, N_a, K_p, D_p$ ) имеет параметры:

$$\text{символы } \{0, a\}, N_p = N_{pc} n_p, N_a = N_{pc} n_a,$$

$$K_p = \log_2 M_p = K_{pc} \log_2 q,$$

$$D_p \geq \sqrt{a^2 D_{xpc} d_{xp} \tau} = \sqrt{D_{xpc} d_p}.$$

Поясним обозначения:  $q$  — основание кода РС; ( $N_{pc}, K_{pc}, D_{xpc}$ ) — соответственно длина кодового слова, число информационных символов в кодовом слове, хэммингово расстояние кода РС; ( $n_p, n_a, d_{xp}, V_p$ ) — соответственно длина кодового слова, число энергонесущих символов в кодовом слове, хэммингово расстояние, объем ( $V_p \geq q$ ) кода В; ( $N_p, N_a, K_p, D_p$ ) — соответственно длина кодового слова, число энергонесущих символов в кодовом слове ( $N_a = N_k$ ), число бит в кодовом слове, евклидово расстояние РП;  $a^2 = P_{cp} n_p / n_a$  — пиковая мощность РП (пиковая мощность троичного кода — ТК),  $P_{cp}$  — средняя мощность на передачу кодового слова РП (ТК);  $\tau$  — длительность символа РП (ТК);  $d_p = \sqrt{a^2 d_{xp} \tau}$  — евклидово расстояние кода В.

В [3] показано, что при одинаковой блоковой длине троичные коды могут значительно выигрывать в объеме кода перед лучшими эквивалентными двоичными кодами. Там же описан алгоритм декодирования ТК, который, в частности, предполагает корреляционное или квазикорреляционное декодирование КП.

Однако при длинах  $N_k = N_a > 100$  и  $D_{xk} > 12$  аппаратная реализация даже квазикорреляционного декодирования КП на сегодняшний день может оказаться слишком сложной. В этих случаях приходится представлять КП, как и РП, в виде каскадного кода первого порядка. Тогда в качестве внешнего кода в КП выберем код РС( $N_{pc}, K_{pc}, D_{xpc}$ ), в частности, с теми же параметрами, что и в РП; внутренним кодом будет максимальный двоичный корректирующий код А( $n_k, k_k, d_{xk}$ ) с символами  $\{\pm 1\}$ , причем ( $n_k, k_k, d_{xk}$ ) — соответственно длина кодового слова, число бит в кодовом слове, хэммингово расстояние кода А.

В итоге получим троичный обобщенный каскадный код второго порядка, т. е. ОКК-2 (соответствует определению, принятому в литературе), с параметрами [4]:

$$\text{символы } \{0, \pm a\}, N = N_{pc} n_p, N_a = N_{pc} n_a,$$

$$M = M_p M_k, K = 2K_{pc} \log_2 q, \quad (4)$$

$$D = \min \{D_p, D_k\},$$

причем РП образует первую ступень при декодировании ТКК, а КП — вторую ступень. При  $D_p \geq \sqrt{a^2 D_{xpc} d_{xp} \tau} = \sqrt{4a^2 D_{xpc} d_{xk} \tau} = D_k$ ,  $d_{xp} = 4d_{xk}$  ( $d_{xp}$  и  $d_{xk}$  — минимальные хэмминговы расстояния внутренних двоичных кодов в РП и КП).

Скорость передачи информации ТКК с параметрами (4)

$$R = (2K_{PC} \log_2 q) / (N_{PC} n_p \tau) = R_p + R_k,$$

где  $R_p$  и  $R_k$  — скорости передачи информации РП и КП, бит/с.

Полагаем, что внутренние коды в РП и КП принимаются (декодируются) в непрерывном гауссовском канале по максимуму функции правдоподобия. При вероятности ошибки декодирования на блок внутреннего кода  $q_B \leq 10^{-2}$  она с достаточной для практики точностью может быть рассчитана по верхней аддитивной границе Гилберта, т. е.

$$q_B \leq N_d \left( 1 - F \frac{d}{\sqrt{2N_0}} \right),$$

где  $N_d$  — число ближайших к переданному кодовых слов;

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

— интеграл вероятности;  $d$  — минимальное расстояние кода в евклидовой метрике;  $N_0$  — односторонняя спектральная плотность мощности шума.

Кроме того, для малых  $q_B$  и больших  $N_{PC}$  сумму биномиальных распределений для вероятности блоковой ошибки декодирования кода РС можно аппроксимировать суммой распределений Пуассона. Тогда

$$Q_{PC} \leq \sum_{i=t+1}^{N_{PC}} C_{N_{PC}}^i q_B^i (1-q_B)^{N_{PC}-i} \approx \sum_{i=t+1}^{N_{PC}} \frac{(N_{PC} q_B)^i \exp(-N_{PC} q_B)}{i!} = I(N_{PC} q_B, t+1),$$

где  $I(x, m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x e^{-t} t^{m-1} dt$  — неполная гамма-функция. Это

приближение тем точнее, чем меньше  $q_B$  и больше  $N_{PC}$ .

Таким образом, вероятность блоковой ошибки декодирования внешнего кода РС в режиме исправления только ошибок может быть рассчитана как с помощью ЭВМ непосредственно по верхней границе для суммы биномиальных распределений, так и с помощью таблиц неполной  $\beta$ -функции с точным вычислением всей биномиальной суммы, а при малых  $q_B$  и больших  $N_{PC}$  — с помощью таблиц неполной гамма-функции. Конечно, замена двух декодеров внешних кодов РС на один предполагает увеличение буферной памяти при декодировании ТКК и наличие двукратного запаса по быстрдействию компонентных декодеров.

**Возможности троичных каскадных кодов.** В табл. 2 представлены три троичных ОКК-2 с параметрами (4), причем внутренние равновесные коды взяты из таблиц [5].

Определим величину  $\beta = E_b/N_0$  для рассматриваемых ТКК. Для квадратурного канала

$$\beta_I = \frac{E_b}{N_0} = \frac{a^2 \tau n_a N_{PC} n_p}{N_0 2 \log_2(2^a) K_{PC} n_p} = \frac{a^2 \tau n_a n}{N_0 n_p 2k_p}, \quad (5)$$

где  $n = n_p N_{PC}$  — блоковая длина ТКК;  $k_p = \log_2(2^a) K_{PC}$ ,  $2k_p/n = 2k_k/n = k/n$  — относительная скорость передачи в квадратурном канале.

Приравняем выражения (3) и (5) и выясним, каким условиям при этом должны удовлетворять ТКК

$$\frac{E_b}{N_0} \geq \frac{2^{4k/n} - 1}{4k/n} = \frac{a^2 \tau n_a n}{N_0 n_p 2k_p}, \text{ или } \frac{2^{4k/n} - 1}{2} = \frac{2a^2 \tau n_a}{N_0 n_p} = \frac{P_I}{N}. \quad (6)$$

Правая часть равенства (6) есть среднее отношение сигнал/шум в ТКК. Для выполнения равенства (6) код должен быть высокоскоростным ( $k/n > 1$ ) и энергетически эффективным. При выполнении этих условий левая часть равенства (6) возрастает, а правая — уменьшается. Тогда при конечной вероятности ошибки декодирования становится возможным выполнение неравенства  $\beta_{ш} \geq \beta$ .

Из табл. 2 следует, что ТКК с номером 2 отстоит от границы Шеннона примерно на 0,1 дБ, а ТКК с номером 3 практически достигает ее  $\Delta\beta_{ш} = (\beta - \beta_{ш}) \rightarrow 0$ .

Однако следует иметь в виду, что граница Шеннона (1) и граница (3) подразумевают безошибочную передачу информации ( $Q_{ош} \rightarrow 0$ ). В зависимости от назначения системы передачи информации практическая передача сообщений без искажений подразумевает вероятность ошибки декодирования бита от  $10^{-3}$  до  $10^{-12}$ . В нашем случае блоковая вероятность ошибки декодирования  $Q_{ош} = 10^{-4}$  ( $q_{бит} \approx 10^{-6}$ ). Можно ли считать такую передачу безошибочной? Этот вопрос будет возникать всегда при приближении и сравнении с границей Шеннона. Более того, превышение этой границы ( $\beta < \beta_{ш}$ ) при безошибочной передаче информации невозможно.

Однако автору не известно ни одного случая столь близкого достижения границы Шеннона двоичными кодами. Иллюстрацией этого утверждения являются лучшие результаты двоичного кодирования (сверточные коды, турбокоды, коды с низкой плотностью проверок на четность), приведенные в табл. 1 [2].

Даже при очень больших блоковых длинах и  $Q_{ош} = 10^{-4}$  эти коды отстоят от границы Шеннона на 0,79—0,87 дБ, что на сегодняшний день является далеко не лучшим результатом.

Границу Шеннона (1) можно представить в виде:

$$\beta = \frac{2^{C/W} - 1}{C/W},$$

где  $\beta = \frac{E_b}{N_0} = \frac{P/N}{\gamma}$ ,  $\gamma = C/W$ .

Составим произведение  $(1/\beta)\gamma = \gamma^2/(2^\gamma - 1)$ , определяющее качество использования АБГШ-канала по энергетике и частотной эффективности. Существует максимум этого произведения при  $\gamma_{opt} = (C/W)_{opt} = 2,3$  бит/(с·Гц). Если строить компонентные каналы с таким значением частотной эффективности, то при их статистической независимости частотная эффективность двумерного канала составит  $\gamma = 4,6$  бит/(с·Гц).

Таблица 2

№	Параметры кодов $(n_p, n_a, d_{xp}, V_p) \cdot PC(N, K, D_x)_{GR2^a}$ и $(n_k = n_a, k_x, d_{kx}) \cdot PC(N, K, D_x)_{GR2^a}$	$\beta = E_b/N_0$ , дБ, при $Q_{ош} = 10^{-4}$	Относительная скорость в квадратурном канале $r_i = k/n$	$2R_i/F = 4k/n$ , бит/(с·Гц)	Граница Шеннона $\beta_{ш} = E_b/N_0$ , дБ, при $C/F = 2R_i/F$	$\Delta\beta_{ш} = \beta - \beta_{ш}$ , дБ
1	$(13,7,4,166) \cdot PC(128,118,11)_{GR2^7}$ и $(7,7,1) \cdot PC(128,118,11)_{GR2^7}$	$\leq 6,205$	0,9928	3,971	5,679	$\leq 0,526$
2	$(14,8,4,278) \cdot PC(256,252,5)_{GR2^8}$ и $(8,8,1) \cdot PC(256,252,5)_{GR2^8}$	6,916	1,125	4,5	6,818	0,098
3	$(14,8,4,278) \cdot PC(256,250,7)_{GR2^8}$ и $(8,8,1) \cdot PC(256,250,7)_{GR2^8}$	6,572	1,116	4,464	6,74	$\rightarrow 0$

Это значение  $\gamma$  реализуется как троичными, так и троичными каскадными кодами. Результаты, близкие к этому значению, дают ТКК с номерами 2 и 3 табл. 2.

Автором построены также ТКК на основе равновесных кодов с  $d_{xp} = 8$ , в том числе равновесные коды с  $n_a = 11$  (код Голея с блоковой длиной  $n = 23$ ,  $d_{xp} = 8$ ), с весами  $n_a = 8$  и 12 (1-удлинненный код Голея с  $n = 24$ ,  $d_{xp} = 8$ ) и другие.

Частотная эффективность таких ТКК ниже и составляет в сумме по двум квадратурным каналам 2,4–3,2 бит/(с·Гц), хотя при вероятности ошибки декодирования  $q_{бит} = 10^{-7}$  они отстоят от границы (3) на 0,18–0,75 дБ.

**Заключение.** Граница Шеннона (1), определяющая поведение идеальной системы, является асимптотической.

Анализ границы Шеннона показывает, что оптимальному обмену между расходом энергии на бит и удельной частотной эффективностью соответствует оптимальное значение относительной скорости передачи  $r = 1,15$  ( $\gamma_{opt} = 2,3$  бит/(с·Гц)). Эти значения недостижимы двоичными кодами.

Построенные автором троичные каскадные коды с относительной скоростью, приближающейся к указанному значению, и общей блоковой длиной, не превышающей 4000 сим-

волов, при совместном применении с двумерной модуляцией КАМ-9 способны обеспечить достаточно близкое достижение границы Шеннона.

*Автор признателен И.М. Теплякову за ценные критические замечания, высказанные им при обсуждении рукописи статьи.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shannon C.E. Communication in the Presence of Noise. IRE National Convention. — New York, N.Y., March 24, 1948.
2. Communication Systems and Research Section JPL/ Code Imperfectness. <http://www331.jpl.nasa.gov/public/imperfectness.html>
3. Мешковский К.А., Кузнецов В.С. Троичные коды с амплитудно- фазовой модуляцией и квазикорреляционным декодированием // Электронная техника. Сер.10. Микроэлектронные устройства. — Вып. 5(29). — М.: 1981.
4. Кузнецов В.С. Троичные каскадные коды второго порядка // Электронная техника. Сер.10. Микроэлектронные устройства. — Вып. 4(40). — М.: 1983.
5. Brouwer A.E., Shearer J.B., Sloane N.J.A. and Smith W.D. A new table of constant weight codes // IEEE. Trans. on Inf. Theory. — 1990. — Vol. IT-36. — №6.

Получено 7.11.08

## ИНФОРМАЦИЯ

### РОСКОМНАДЗОР ГОТОВ СОВЕРШЕНСТВОВАТЬ СВОЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

**24 февраля 2009 г. состоялось очередное заседание НП «Телеком Форум». Оно проходило в формате круглого стола на тему: «Совершенствование работы Федеральной службы по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций с учетом современных особенностей ведения бизнеса».**



Руководитель Роскомнадзора  
С.К. Ситников

В работе круглого стола приняли участие заместитель министра связи и массовых коммуникаций **Н.С. Мардер**, руководитель Федеральной службы по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций **С.К. Ситников**, начальники профильных управлений Роскомнадзора **С.Ю. Демочко** (Управление контроля и надзора в сфере связи), **А.С. Стадинчук** (Управление использования радиочастотного спектра и лицензирования в сфере связи), Президент МТУСИ **В.В. Шагильдян**, Президент МАС **А.П. Оситис**, российские и зарубежные операторы связи — участники НП «Телеком Форум».



Участники круглого стола

Как подчеркивали в своих выступлениях представители Роскомнадзора, особое внимание сегодня уделяется снижению административной нагрузки на бизнес. В частности, служба намерена увеличить долю проверок, проводимых дистанционно, т. е. без взаимодействия с проверяемыми лицами, до 60% контрольно-надзорных мероприятий. Такой вид контроля принципиально исключает какие-либо организационные и временные издержки оператора при проведении контроля.

В Службе возобновлена работа по рассмотрению межоператорских споров по вопросам взаимодействия. Данная процедура рассматривается как аналог досудебного урегулирования споров. Кроме того, Роскомнадзор активизирует борьбу с так называемыми «бумажными» компаниями, которые создавались, получали разрешения, лицензии и ресурс нумерации для дальнейшей перепродажи. Такие компании, как отмечалось в ходе «круглого стола», паразитируют на



Президент МТУСИ В.В. Шагильдян и заместитель министра связи и массовых коммуникаций Н.С. Мардер

ограниченных ресурсах, в то время как реальный бизнес страдает от ресурсных ограничений. Также для снижения административной нагрузки на бизнес Служба предлагает ввести в практику метод планирования, который будет учитывать историю оператора. Это позволит не планировать проверки в отношении законопослушных компаний.

В ходе дискуссии участники круглого стола отмечали необходимость внесения изменений в законодательство в сфере связи и телекоммуникаций с целью его приведения в соответствие с современными реалиями. Как отмечали представители Минкомсвязи России, работа над поправками в законодательство ведется, причем при активном участии представителей бизнес-сообщества.

С использованием материалов  
официального Интернет-ресурса  
Минкомсвязи РФ