

УДК 621.397

## ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРОВ ДЛЯ СУБПОЛОСНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ КРАТНОСТИ 3×3

**А.Л. Приоров**, доцент Ярославского государственного университета (ЯрГУ) им. П.Г. Демидова, к.т.н.

**В.А. Волохов**, аспирант ЯрГУ им. П.Г. Демидова

**И.С. Мочалов**, студент 5-го курса ЯрГУ им. П.Г. Демидова

В задачах фильтрации и сжатия цифровых изображений и видеопоследовательностей, широко распространенных в современных телекоммуникационных системах различного назначения, хорошо зарекомендовало себя дискретное вейвлет-преобразование [1, 2]. В настоящей работе представлен алгоритм параметризации и синтеза неразделимых [3, 4] и разделимых [5, 6] вейвлет-фильтров (ВФ) кратности 9 (3×3) с заданными ограничениями на амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) низкочастотного (НЧ) вейвлет-фильтра. В частности, рассматривается применение данного типа фильтров в задаче обработки цифровых изображений с использованием схемы субполосного разложения кратности 9.

**Общие положения кратномасштабного анализа.** Рассмотрим трехполосную схему вейвлет-разложения (рис. 1), используемую в одномерном случае.

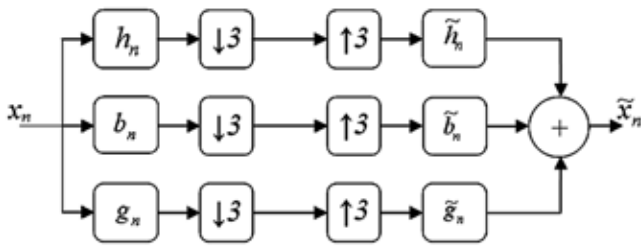


Рис. 1

По этой схеме осуществляется свертка некоторого одномерного сигнала с импульсными характеристиками (ИХ) у трех видов фильтров: низкочастотного ( $h_n$ ), полосового ( $b_n$ ) и высокочастотного ( $g_n$ ). Выходные сигналы этих фильтров претерпевают децимацию, в результате которой остается только каждый третий отсчет. Восстановление исходного сигнала производится путем интерполяции нулями последовательностей на выходе блоков децимации и их последующей свертки с ИХ фильтров восстановления.

Если ВФ являются ортогональными, то при восстановлении используются фильтры, частотные характеристики (ЧХ) которых комплексно сопряжены с ЧХ фильтров разложения с точностью до фазовой задержки. В пространственной области это условие записывается следующим образом:

$$\tilde{h}_n = h_{3k-n}, \quad \tilde{b}_n = b_{3k-n}, \quad \tilde{g}_n = g_{3k-n},$$

где  $k$  – наименьшее натуральное число такое, что  $3k \geq M$  ( $M$  – длина ИХ). Если выходной и входной сигналы идентичны (с точностью до сдвига на  $3k$ ), то банк ВФ выполняет точное восстановление сигнала [1, 2]. Для этого необходимо, чтобы ИХ  $h_n$ ,  $b_n$  и  $g_n$  подчинялись условиям ортогональности сдвигов [7]:

$$\sum_n h_n h_{n+3k} = \sum_n g_n g_{n+3k} = \sum_n b_n b_{n+3k} = \delta_k^0, \quad (1)$$

$$\sum_n g_n h_{n+3k} = \sum_n b_n h_{n+3k} = \sum_n b_n g_{n+3k} = 0. \quad (2)$$

В случае двумерного неразделимого вейвлет-преобразования кратности 3×3 условия ортогональности сдвигов ИХ имеют вид:

$$\sum_n \sum_k h_{n,k}^i h_{n+Ni, k+Np}^j = \delta_i^0 \delta_p^0 \delta_j^i, \quad (3)$$

где  $\delta_i^j$  – символ Кронекера;  $i, j \in 0 \dots 8$  – номера ВФ (для НЧ фильтра индекс «0» можно опустить).

Для НЧ фильтра данные условия можно записать в виде условия на квадрат АЧХ:

$$\sum_{n=0}^2 \sum_{k=0}^2 \left| H \left( \omega_1 + \frac{2\pi n}{3}, \omega_2 + \frac{2\pi k}{3} \right) \right|^2 = 9, \quad (4)$$

где  $H(\omega_1, \omega_2)$  – комплексная ЧХ фильтра;  $\omega_1, \omega_2$  – нормированные пространственные частоты

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_n \sum_k h_{n,k} e^{-j(\omega_1 n + \omega_2 k)}.$$

**Параметризация ВФ субполосного разложения произвольной кратности.** Основными требованиями, ограничивающими выбор НЧ вейвлет-фильтра, являются условия ортогональности сдвигов ИХ. Это условие обеспечивает полную обратимость вейвлет-разложения. Для того чтобы вейвлет-функция и соответствующая масштабирующая функция были достаточно регулярными желательно также наличие хотя бы одного нулевого момента.

Ограничения на порядок гладкости  $m$  применительно к частотным свойствам ВФ определяются условиями [8]:

$$\left. \frac{\partial^m H(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^m} \right|_{\omega_1 = \frac{2\pi n}{3}} = 0; \quad \left. \frac{\partial^m H(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2^m} \right|_{\omega_2 = \frac{2\pi n}{3}} = 0, \quad n \in 1, 2. \quad (5)$$

Представим квадрат АЧХ двумерного ВФ в виде разложения по косинусным функциям:

$$|H(\omega_1, \omega_2)|^2 = \frac{q_{0,0}}{2} + \sum_k \sum_n a_{n,k} \cos(\omega_1 n + \omega_2 k). \quad (6)$$

Следует отметить, что разложение (6) определяет общий случай представления фильтров. Для реализации необходимой гладкости вейвлет-функции определяется квадрат АЧХ в виде произведения двух тригонометрических полиномов (метод введения дополнительных множителей для увеличения числа нулевых моментов в одномерном случае рассмотрен в [1]):

$$|H(\omega_1, \omega_2)|^2 = f(\omega_1)^m f(\omega_2)^m \left( \frac{d_{0,0}}{2} + \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0}^J d_{n,k} \cos(\omega_1 n + \omega_2 k) \right) =$$

$$= \frac{q_{0,0}}{2} + \sum_k \sum_n q_{n,k} \cos(\omega_1 n + \omega_2 k). \quad (7)$$

Здесь величины  $d_{n,k}$  являются коэффициентами параметризации и образуют матрицу параметров  $K \times J$ . Функция  $f(\omega_1)f(\omega_2)$  — тригонометрический полином минимального порядка, удовлетворяющий (4) и (5). Для функции  $f(\omega)$  справедливо выражение [1]:

$$f(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega) + a_2 \cos(2\omega) = 1 + 4/3 \cos(\omega) + 2/3 \cos(2\omega).$$

Найдем уравнения, связывающие параметры  $d_{n,k}$ . Доопределим  $a_i$  и  $d_{n,k}$  на области отрицательных значений  $n$  и  $k$  так, чтобы выражение (7) обладало симметрией относительно этих переменных:

$$a_i = a_{|i|}, \quad d_{n,k} = \begin{cases} d_{n,k}, & n \geq 0 \text{ и } k \geq 0; \\ d_{-n,-k}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Опуская некоторые математические действия, запишем выражение для параметров  $q_{n,k}$  в разложении (6):

$$q_{n,k} = \frac{1}{4} \sum_{j=-2}^2 \sum_{i=-2}^2 d_{n-i, k-j} a_i a_j. \quad (9)$$

Подставляя равенство (8) в условие (4) на АЧХ, получим следующее уравнение:

$$9 \frac{q_{0,0}}{2} + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{nk \neq 0} q_{n,k} \left[ \cos(\omega_1 n + \omega_2 k) \cos\left(\frac{2\pi}{3}in + \frac{2\pi}{3}jk\right) \right] - \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{nk \neq 0} q_{n,k} \left[ \sin(\omega_1 n + \omega_2 k) \sin\left(\frac{2\pi}{3}in + \frac{2\pi}{3}jk\right) \right] = 9.$$

Теперь воспользуемся известной формулой

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{l=0}^2 e^{j(\frac{2\pi}{3}in + \frac{2\pi}{3}lk)} = 9\delta_{n+3p}^0 \delta_{k+3q}^0, \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

где  $\delta_n^0$  — символ Кронекера с одним из параметров равным нулю. Приведем полученное уравнение к другому виду:

$$\frac{q_{0,0}}{2} + \sum_{\substack{n,k \\ nk \neq 0}} q_{n,k} \cos(\omega_1 n + \omega_2 k) \delta_{n+3p} \delta_{k+3q} = 1. \quad (10)$$

Здесь и далее для простоты записи под  $\delta_n$  понимается  $\delta_n^0$ .

Используя свойства  $\delta$ -символа, уравнение (10) можно привести к эквивалентной системе уравнений:

$$q_{3n,3k} = 2\delta_n \delta_k, \quad (11a)$$

или с учетом (9) к аналогичной системе

$$\sum_{j=-2}^2 \sum_{i=-2}^2 d_{3n-i, 3k-j} a_i a_j = 8\delta_n \delta_k, \quad (11b)$$

где  $a_j$  и  $d_{n,k}$  доопределены на область отрицательных значений индексов. В соответствии с (11a) число уравнений составляет

$$D = \left( \left\lfloor \frac{K+1}{3} \right\rfloor + 1 \right) \left( \left\lfloor \frac{J+1}{3} \right\rfloor + 1 \right),$$

где  $K$  и  $J$  — размеры матрицы параметров  $d_{n,k}$ ;  $[b]$  — целая часть числа  $b$ .

Необходимым условием, ограничивающим выбор параметров  $d_{n,k}$ , является положительность тригонометрического ряда

$$|H(\omega_1, \omega_2)|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_n \sum_k d_{n,k} \cos(\omega_1 n + \omega_2 k) > 0. \quad (12)$$

Решение неравенства (12) в явном виде, при котором результатом будет  $A \times B$ -мерная область существования параметров, представляет сложную задачу. Даже для одномерного случая разработаны лишь частные решения подобного неравенства. Введем дополнительные ограничения на параметры  $d_{n,k}$ :

$$d_{0,0} > \sum_n \sum_k |d_{n,k}|. \quad (13)$$

Это неравенство выполняется, поскольку:

$$d_{0,0} > \sum_n \sum_k |d_{n,k}| \geq \sum_n \sum_k |d_{n,k} \cos(\omega_1 n + \omega_2 k)| \geq \left| \sum_n \sum_k d_{n,k} \cos(\omega_1 n + \omega_2 k) \right| \geq - \sum_n \sum_k d_{n,k} \cos(\omega_1 n + \omega_2 k).$$

Частный случай системы уравнений (11) для размерностей матрицы параметров  $3 \times 3$ , порядка гладкости  $m=1$  и разложения кратности 9 имеет вид:

$$\begin{cases} 9d_{00} + 12d_{01} + 12d_{10} + 8d_{11} + 6d_{02} + 6d_{20} + 4d_{12} + 4d_{21} + 2d_{22} = 18; \\ 6d_{20} + 4d_{21} + 3d_{10} + 2d_{11} + 2d_{22} + d_{12} = 0; \\ 6d_{02} + 4d_{12} + 3d_{01} + 2d_{11} + 2d_{22} + d_{21} = 0; \\ 4d_{22} + 2d_{21} + 2d_{12} + d_{11} = 0. \end{cases}$$

При размере матрицы параметров  $3 \times 3$  число уравнений равно 4, а число неизвестных — 9. Появляется возможность варьировать АЧХ НЧ фильтра, сохраняя при этом справедливость условий (4) и (5). На рис. 2 в качестве примера представлен квадрат АЧХ НЧ вейвлет-фильтра, рассчитанного для размера матрицы параметров  $3 \times 3$  при следующих значениях пяти коэффициентов:  $d_{0,0} = 2,86$ ;  $d_{0,1} = -0,53$ ;  $d_{1,0} = -0,66$ ;  $d_{2,0} = d_{0,2} = 0,2$ . В этом случае матрица параметров

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2,86 & -0,53 & 0,2 \\ -0,66 & 0,66 & -0,2 \\ 0,2 & -0,07 & -0,03 \end{bmatrix}$$

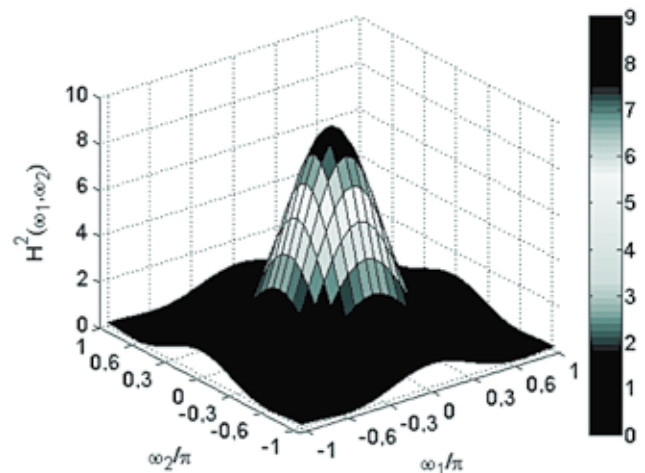


Рис. 2

В общем случае выбор коэффициентов  $d_{n,k}$  зависит от решаемой задачи и выполняется с учетом уравнений (11) и дополнительных условий (13).

Следующий этап синтеза двумерных ВФ связан с расчетом ИХ, для чего требуется определить фазочастотную характеристику. Двумерную фазовую задачу можно решить, применив итерационный алгоритм Файнэпа (модификация алгоритма Герхберга) [3]. Реализация алгоритма представлена ниже.

**Шаг 1.** Генерируется матрица  $\mathbf{P}$  с псевдослучайными элементами  $\{p_{n,k}\}$  размерности  $M \times M$ , где  $M$  — порядок синтезируемого фильтра, и определяется фазочастотная характеристика двумерного Фурье-преобразования матрицы  $\mathbf{P}$ :

$$\varphi_0(\omega_1, \omega_2) = \arg \left( \sum_n \sum_k p_{n,k} e^{-j(\omega_1 n + \omega_2 k)} \right).$$

**Шаг 2.** Вычисляется первая оценка ИХ путем обратного Фурье-преобразования синтезируемой ЧХ:

$$h_1(n, k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int H_1(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 n + \omega_2 k)} d\omega_1 d\omega_2.$$

**Шаг 3.** В связи с изначальной несогласованностью фазочастотной характеристики фильтра с псевдослучайной ИХ и известной АЧХ  $|H(\omega_1, \omega_2)|$ , размерность ИХ в первом приближении  $h_1(n, k)$  довольно велика. Выполняется усечение  $h_1(n, k)$  до требуемой размерности  $M \times M$ :

$$h_{1\text{усеч}}(n, k) = h_1(n, k), \quad n = 1, \dots, M, k = 1, \dots, M.$$

**Шаг 4.** Определяется фазочастотная характеристика двумерного Фурье-преобразования ИХ  $h_{1\text{усеч}}(n, k)$ :

$$\varphi_1(\omega_1, \omega_2) = \arg \left( \sum_n \sum_k h_{1\text{усеч}}(n, k) e^{-j(\omega_1 n + \omega_2 k)} \right).$$

**Шаг 5.** Вычисляется вторая оценка ИХ путем обратного Фурье-преобразования синтезируемой ЧХ:

$$h_2(n, k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int |H(\omega_1, \omega_2)| e^{j\varphi_1(\omega_1, \omega_2)} e^{j(\omega_1 n + \omega_2 k)} d\omega_1 d\omega_2.$$

Процедура итерационно повторяется (Шаг 3 — Шаг 5) до тех пор, пока норма отклонения значений ИХ текущей итерации от значений ИХ предыдущей итерации не будет меньше заданного порога

$$\sum_n \sum_k (h_{i\text{усеч}} - h_{i-1\text{усеч}})^2 < \varepsilon.$$

Алгоритм Файнэпа устанавливает взаимно-однозначное соответствие между квадратом АЧХ и ИХ соответствующего ВФ. После нахождения ИХ НЧ вейвлет-фильтра решается задача определения ИХ остальных вейвлет-фильтров в соответствии с соотношениями (1), (2) и (3).

В таблице приведены ИХ синтезированных вейвлет-фильтров, а на рис. 3 представлены квадраты АЧХ соответствующих ВФ.

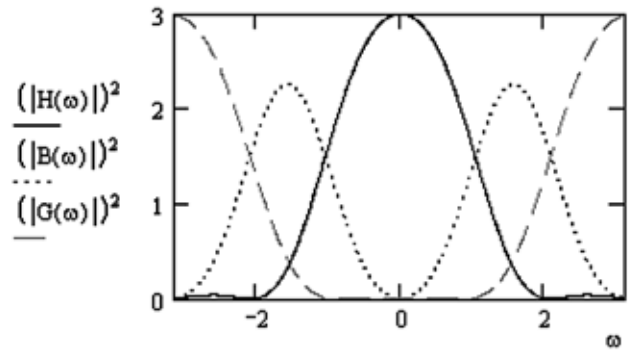


Рис. 3

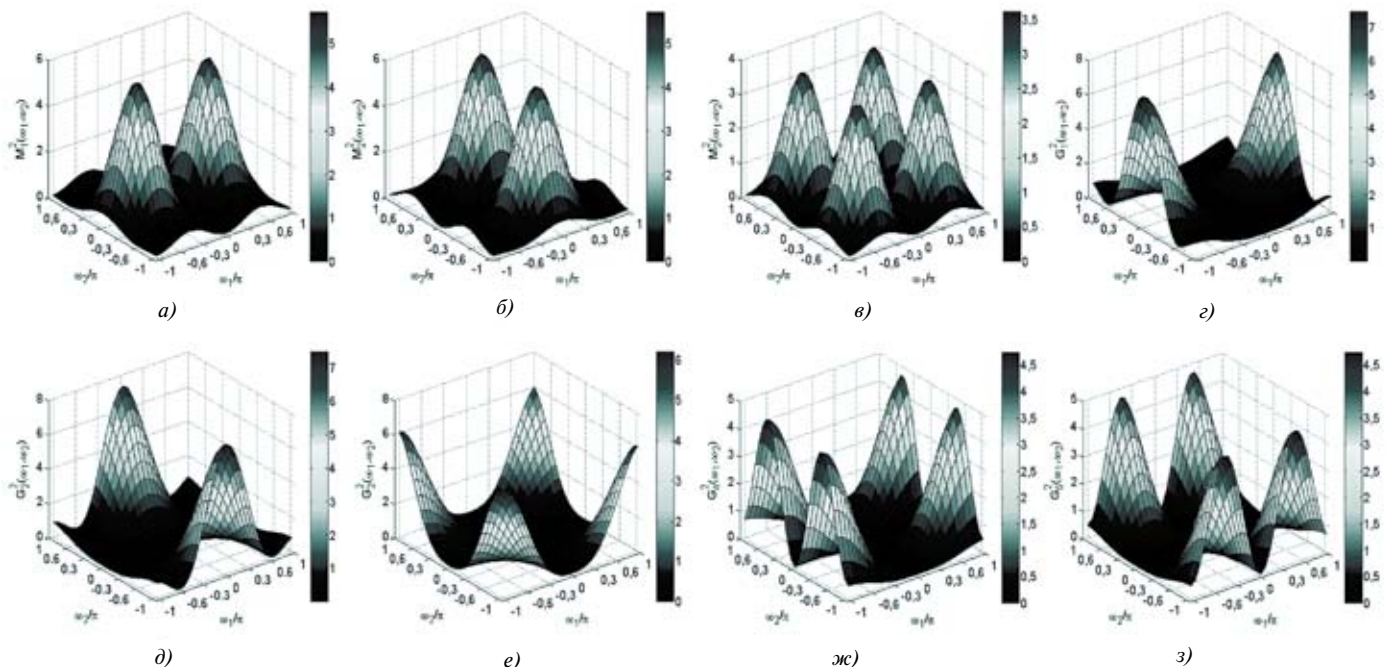


Рис. 4



Таблица

$n$	0	1	2	3	4
$h_n$	-0,115	0,231	0,577	0,693	0,346
$b_n$	0,267	-0,534	-0,534	0,534	0,267
$g_n$	0,340	-0,680	0,616	-0,184	-0,092

На рис. 4 представлены квадраты АЧХ синтезированных ВФ:  $a-v$  — полосовые и  $z-z$  — высокочастотные.

Пример разбиения пространственной области (для одной итерации) с использованием синтезированных фильтров для тестового изображения «Танк» (рис. 5, а) приведен на рис. 5, б. Здесь НН — выделенные низкие частоты по горизонтали и вертикали, НС — низкая по горизонтали и средняя по вертикали, НВ — низкая по горизонтали и высокая по вертикали и так далее.

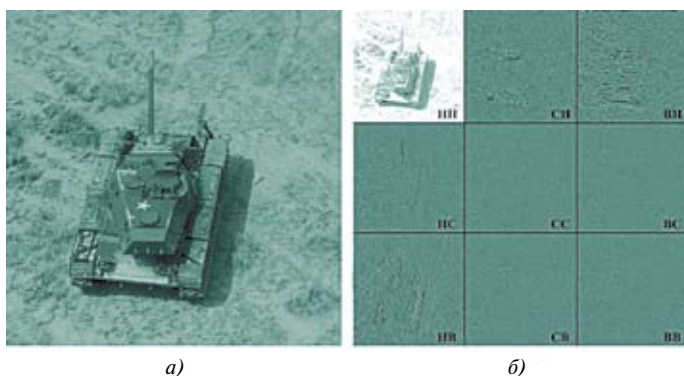


Рис. 5

Представленный алгоритм параметризации двумерных вейвлет-функций основан на представлении квадрата АЧХ НЧ вейвлет-фильтра тригонометрическим полиномом. Алгоритм отличается простотой реализации и наглядным представлением параметров параметризации. Он позволяет проводить оптимизацию вейвлет-фильтров с заданным числом нулевых моментов и длиной ИХ по критерию, определяемому решаемой задачей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. А.В. Широбочков. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
2. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. Я.М. Жилейкина — М.: Мир, 2005.
3. Кобелев В.Ю., Приоров А.Л. Синтез оптимизированных двумерных неразделимых вейвлет-фильтров для сжатия изображений // Телекоммуникации. — 2006. — № 9. — С. 7—12.
4. Кобелев В.Ю., Приоров А.Л. Применение неразделимых вейвлет-фильтров в задачах сжатия изображений // Цифровая обработка сигналов. — 2006. — № 2. — С. 21—26.
5. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Новый подход к использованию вейвлет-фильтров при обработке изображений // Цифровая обработка сигналов. — 2008. — № 1. — С. 37—42.
6. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Расчет банков фильтров дискретного вейвлет-преобразования и анализ их характеристик // Цифровая обработка сигналов. — 2006. — № 2. — С. 2—10.
7. Mau J. Regular M-band modulated orthogonal transforms // IEEE Int. conf. on acoustics, speech and signal processing (ISASSP-94). — 1994. — Vol. 3. — P. 125—128.
8. Peter S., Peter N. Theory of regular M-band wavelet bases // IEEE Trans. signal proc. — 1993. — Vol. 40, № 12. — P. 3497—3511.

Получено после доработки 11.12.08

## ПОЗДРАВЛЯЕМ ЮБИЛЯРА!



**18 февраля ученому секретарю Научно-технического совета Минкомсвязи России Юрию Анатольевичу Алексееву исполнилось 70 лет.**

Юрий Анатольевич в 1963 г. окончил радиотехнический факультет Московского авиационного института и был распределен в ЦНИИС, где работал до 2000 г., занимая должности инженера, старшего инженера, ведущего конструктора, заместителя начальника лаборатории, начальника лаборатории, начальника отдела, заместителя генерального директора (1988 г.), первого заместителя генерального директора (1993 г.).

Более 35 лет Ю.А. Алексеев входит в состав Научно-технического совета Министерства связи. В 2000 г. он стал научным секретарем НТС.

Юрий Анатольевич — специалист в области цифровых систем передачи, систем синхронизации цифровых сигналов, одним из первых в стране он занялся разработкой принципов и построением тактовой сети синхронизации в России, созданием

нормативной базы, определяющей принципы построения цифровых сетей связи.

Ю.А. Алексеев — автор более 60 печатных работ по вопросам построения цифровых сетей связи и 16 авторских изобретений, многие из которых внедрены в серийные разработки и использованы в Рекомендациях МСЭ по построению систем PDH и SDH.

Юрий Анатольевич — кандидат технических наук, академик Международной академии связи. Награжден медалями «За трудовую доблесть», «В память 850-летия Москвы», «Ветеран труда», Почетной грамотой ЦК КПСС, Совета министров СССР, ВЦСПС, знаками «Почетный радист», «Изобретатель СССР», ему присвоено звание «Мастер связи». Он — лауреат премии Совета министров СССР.

**Редакция и редколлегия журнала «Электросвязь» сердечно поздравляют Юрия Анатольевича с юбилеем и желают ему крепкого здоровья и больших творческих успехов!**