УДК 621.396.93

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ ОТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЧС

Ю.А. Воронцов, зав. кафедрой ИТЭУ МТУСИ, д.т.н.
А.Н. Попов, начальник управления ФГУП ГРЧЦ

Математическая постановка задачи оптимизации прибыли от эффективного использования РЧС может быть сформулирована следующим образом [3, 4, 6] . Прибыль регулятора и каждого оператора есть произведение цены p (тарифа) на объем продаж услуг q минус затраты z:

$$\Pi_1 = p_1 q_1 - z_1,$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\Pi_n = p_n q_n - z_n,$$
$$\Pi_р = p_р q_р - z_р.$$

При введении платы за спектр прибыль операторов уменьшается на величину Δz_i. Для регулятора прибыль складывается из платы операторов регулятору за спектр минус затраты $z_р$ плюс дополнительные затраты регулятора $\Delta z_р$ на поддержание РЧС:

$$\Pi_1 = p_1 q_1 - (z_1 + \Delta z_1),$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\Pi_n = p_n q_n - (z_n + \Delta z_n),$$
$$\Pi_р = \sum_{i=1}^{n} z_i - \left(z_р + \Delta z_р\right).$$

Полученные математические выражения для целевых функций Π_i и ограничений $\Pi_i \geq 0$ позволяют сформулировать задачу эффективного использования радиочастотного спектра как задачу оптимизации в следующем виде [1]:

Дано:

- тариф за использование РЧС для клиентов операторов: $p_1 \ldots p_n$;
- объем продаж услуг РЧС клиентам операторов: $q_1 \ldots q_n$;
- затраты операторов и регулятора по оказанию услуг $z_1, \ldots z_n$, $z_р$, $\Delta z_р$;
- число операторов n.

Задача 1. *Найти:* для операторов такую плату регулятору за РЧС $\Delta z_1 \ldots \Delta z_n$, при которой прибыль регулятора и операторов будет максимальна:

$$\max_{\{\Delta z_1 \ldots \Delta z_n\}} \Pi_1(\Delta z_1) = p_1 q_1 - (z_1 + \Delta z_1),$$
$$\ldots$$
$$\max_{\{\Delta z_1 \ldots \Delta z_i\}} \Pi_n(\Delta z_n) = p_n q_n - (z_n + \Delta z_n),$$
$$\max_{\{\Delta z_1 \ldots \Delta z_n\}} \Pi_р\left(\Delta z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i - \left(z_р + \Delta z_р\right),$$

Ограничения:

$$0 \leq \Delta z_i \leq p_i q_i - z_i,\ i = 1, 2 \ldots n.$$

Можно привязать плату операторов за РЧС либо к себестоимости $\Delta z_i = x_i z_i$, либо к прибыли $\Delta z_i = x_i p_i q_i$. Тогда постановка задачи 1 может быть представлена в виде задач 2 и 3.

Задача 2. *Найти:* для операторов такой процент отчисления от себестоимости x_i в качестве платы регулятору за РЧС $\Delta z_1 ... \Delta z_n$, при котором прибыль регулятора и операторов будет максимальна:

$$\max_{\{x_1 ... x_n\}} \Pi_1(x_1) = p_1 q_1 - (1 + x_1) z_1$$

...

$$\max_{\{x_1 ... x_n\}} \Pi_n(x_n) = p_n q_n - (1 + x_n) z_n$$

$$\max_{\{x_1 ... x_n\}} \Pi_{\text{р}}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i - (z_{\text{р}} + \Delta z_{\text{р}}),$$

Ограничения:

$0 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2 ... n$,

$\Pi_i(x_i) \ge 0$, $i = 1, 2 ... n$.

Задача 3. *Найти:* для операторов такой процент отчисления от прибыли x_i в качестве платы регулятору за РЧС $\Delta z_1 ... \Delta z_n$, при котором прибыль регулятора и операторов будет максимальна:

$$\max_{\{x_1 ... x_n\}} \Pi_1(x_1) = (1 - x_1) p_1 q_1 - z_1,$$

...

$$\max_{\{x_1 ... x_n\}} \Pi_n(x_n) = (1 - x_n) p_n q_n - z_n,$$

$$\max_{\{x_1 ... x_n\}} \Pi_{\text{р}}(x_{\text{р}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i q_i - (z_{\text{р}} + \Delta z_{\text{р}}),$$

Ограничения:

$0 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2 ... n$,

$\Pi_i(x_i) \ge 0$, $i = 1, 2 ... n$.

Так же можно сформулировать задачу оптимизации экономической эффективности управления РЧС как задачу на max min в следующем виде:

Дано:

- тариф за использование РЧС для клиентов операторов: $p_1 ... p_n$;
- объем продаж услуг РЧС клиентам операторов: $q_1 ... q_n$;
- затраты операторов и регулятора по оказанию услуг $z_1 ... z_n$, $z_{\text{р}}$, $\Delta z_{\text{р}}$;
- число операторов n.

Задача 4. *Найти:* для операторов такую плату регулятору за РЧС $\Delta z_1 ... \Delta z_n$, при которой минимальная прибыль регулятора и операторов будет максимальна (плата за спектр, которая максимизирует минимальную прибыль регулятора и операторов):

$$\max_{\{\Delta z_1 ... \Delta z_n\}} (\min \Pi_1(\Delta z_1), \Pi_2(\Delta z_2) ... \Pi_n(\Delta z_n), \Pi_{\text{р}}(\Delta z_1 ... \Delta z_n)).$$

$i = 1, 2, ...$.

Ограничения:

$0 \le \Delta z_i \le p_i q_i - z_i$, $i = 1, 2 ... n$.

Можно свести задачу оптимизации экономической эффективности управления РЧС к задаче однокритериальной оптимизации и представить ее в виде оптимизации свертки критериев:

Задача 5. *Найти:* для операторов такую плату регулятору за РЧС $\Delta z_1 ... \Delta z_n$, при которой суммарная взвешенная прибыль всех участников рынка (регулятора и операторов) будет максимальна:

$$\max_{\{\Delta z_1 ... \Delta z_n\}} c_1 \Pi_1(\Delta z_1) + c_2 \Pi_2(\Delta z_2) + ... + c_n \Pi_n(\Delta z_n) + c_{\text{р}} \Pi_{\text{р}}(\Delta z_1 ... \Delta z_n).$$

Ограничения:

$0 \le \Delta z_i \le p_i q_i - z_i$, $i = 1, 2, ... n$,

$c_1 + c_2 + ... + c_n + c_{\text{р}} = 1$.

Методы решения задач оптимизации 1—5 относятся к следующим трем группам: методы, основанные на применении безусловного критерия предпочтения (БКП), на применении какого-либо из условных критериев предпочтения (УКП), комбинация указанных методов. Наибольшее практическое применение получили: метод, основанный на введении результирующего показателя качества, минимаксный подход, перевод всех показателей качества $\Pi_1 ... \Pi_m$ (за исключением одного) в разряд ограничений (типа равенств или неравенств), метод последовательных уступок решения задач многокритериальной оптимизации.

Рассмотрим решение задач 1—3 многокритериальной оптимизации методом последовательных уступок. Этапы решения задач этим методом следующие:

1. Перенумеруем все показатели качества в порядке их важности: $\Pi_{\text{р}}$, $\Pi_1 .. \Pi_n$, так что наиболее важным считается показатель $\Pi_{\text{р}}$, а наименее важным — Π_n.

2. Найдем максимально возможное значение $\Pi_{\text{рmax}}$ (при заданных условиях и ограничениях) при игнорировании всех остальных показателей $\Pi_1 ... \Pi_n$ (т. е. в предположении, что остальные показатели нас не интересуют).

3. Зададим «уступку» $\Delta k_{\text{р}}$, т. е. допустимое уменьшение показателя $\Pi_{\text{р}}$ по сравнению с величиной $\Pi_{\text{рmax}}$ (эта уступка необходима для получения на последующих этапах синтеза приемлемых результатов игнорированных показателей качества $\Pi_1 ... \Pi_n$).

4. Ищем максимум Π_1 при введении дополнительного ограничения (условия) $\Pi_{\text{р}} \ge \Pi_{\text{рmax}} - \Delta k_{\text{р}}$ и игнорировании остальных показателей $\Pi_2 ... \Pi_n$.

5. Вводим допустимую «уступку» Δk_1 в величине показателя Π_1 и ищем величину $\Pi_{2\max}$ при введении двух дополнительных ограничений $\Pi_{\text{р}} \ge \Pi_{\text{рmax}} - \Delta k_{\text{р}}$, $\Pi_1 \ge \Pi_{1\max} - \Delta k_1$ и игнорировании остальных показателей $\Pi_3 ... \Pi_n$.

6. Аналогичную процедуру продолжаем вплоть до последнего этапа, при котором ищем максимально возможное значение $\Pi_{n\max}$. Естественно, что на всех этапах учитываются исходные условия и ограничения. Найденная на этом этапе плата регулятору за РЧС $\Delta z_1 ... \Delta z_n$ и значения показателей $\Pi_{\text{р}}$, $\Pi_1 .. \Pi_n$ считаются окончательными (если они удовлетворяют ограничениям).

Для решения задачи 4 постановку задачи переформулируем в *эквивалентной постановке задачи линейного программирования*, вводя новую переменную β_0 и новые ограничения.

Найти: такие значения переменных $\hat{\beta}_0$, Δz_i, $i = 1, 2, ... n$, которые максимизируют линейную аддитивную целевую функцию:

$$\hat{\beta}_0 = \max_{\{\Delta z_i; \beta_0\}} c_0 \beta_0 + c_1 \Delta z_1 + c_2 \Delta z_2 + ... + c_n \Delta z_n,$$

где $c_0 = 1$, $c_i = 0$, $i = 1,2 ... N$.

Ограничения :

$\beta_0 \le \Pi_1 = p_1 q_1 - (z_1 + \Delta z_1)$,

$\beta_0 \le \Pi_2 = p_2 q_2 - (z_2 + \Delta z_2)$,

...

...

$$\beta_0 \le \Pi_{\text{р}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i - (z_{\text{р}} + \Delta z_{\text{р}}).$$

$0 \le \Delta z_i \le p_i q_i - z_i$, $i = 1, 2 ... n$.

Таблица

Задача	$П_р$	$\Delta z_1/ П_1$	$\Delta z_2/ П_2$	$\Delta z_3/ П_3$	Параметры
1	$7.51475 \cdot 10^9$	$9.22536 \cdot 10^8$ $2.15258 \cdot 10^9$	$7.89944 \cdot 10^8$/ $7.47616 \cdot 10^8$	$5.82983 \cdot 10^9$/ $3.20407 \cdot 10^8$	Δk (0.3,0.3,0.3)
2	$7.51475 \cdot 10^9$	0.30 / $2.15258 \cdot 10^9$	0.51 / $7.47616 \cdot 10^8$	0.95 / $3.20407 \cdot 10^8$	Δk (0.3,0.3,0.3) $pq = 2z$
3	$7.51475 \cdot 10^9$	0.15 / $2.15258 \cdot 10^9$	0.26 / $7.47616 \cdot 10^8$	0.47 / $3.20407 \cdot 10^8$	Δk (0.3,0.3,0.3) $pq = 2z$
4	$1.48609 \cdot 10^9$	$2.76018 \cdot 10^8$ / $2.7991 \cdot 10^9$	0 / $1.53756 \cdot 10^9$	$1.23764 \cdot 10^9$/ $4.9126 \cdot 10^9$	Число итераций n = 10000
5	0	$2.75625 \cdot 10^7$ / $3.04756 \cdot 10^9$	0 / $1.53756 \cdot 10^9$	0 / $6.15024 \cdot 10^9$	c (0.25,0.25,0.25,0.25) Сумм. прибыль $2.68384 \cdot 10^9$

Исходную задачу свели к задаче линейного программирования, которая решается графически при двух переменных и численно симплекс-методом в общем случае. Задача 5 фактически есть задача линейного программирования.

Численные примеры. Рассмотрим решения задач 1—5 при следующих исходных данных.

Дано:

- прибыль операторов без учета платы за спектр $\hat{П}_i = p_i q_i - z_i$ $i = 1,2...n$;
- суммарные затраты регулятора на поддержание ресурса $\hat{z}_р = z_р + \Delta z_р$;
- число операторов сотовой связи в регионе — 3.

$\hat{П}_1$ = 3075119334 руб., $\hat{П}_2$ = 1537559667 руб.,
$\hat{П}_3$ = 6150238669 руб., $\hat{z}_р$ = 27562500 руб.

Данные показатели определены по результатам финансового моделирования деятельности трех компаний операторов сотовой связи в регионе и получения платы за использование спектра от этих компаний регулятором. Найдем оптимальные значения платы за спектр и соответствующую прибыль для трех операторов как плательщиков за аренду ресурса и сумму поступлений регулятору от предоставления частотного ресурса в аренду трем операторам в постановках 1—5. Результаты расчетов, выполненных с использованием системы компьютерной математики Mathematica 6 [2, 5], приведены в таблице.

Выводы.

1. Метод последовательных уступок (задачи 1—3) — хорошо регулируемый процесс оптимизации путем выбора величин уступок и порядка ранжирования критериев.

2. Метод максиминной оптимизации (задача 4) позволяет найти такую плату за спектр, которая выравнивает прибыль всех участников рынка — регулятора и операторов.

3. Метод свертки критериев (задача 5) — плохо управляемый процесс оптимизации, трудно подобрать веса для получения нужного результата.

4. Используя полученные экономико-математические модели и анализируя финансовые показатели операторов и регулятора, можно судить о недополученных средствах от предоставления частотного ресурса в коммерческую эксплуатацию, которые являются показателем эффективности государственной тарифной политики. Кроме того, можно определить оптимальное количество игроков — пользователей РЧС, с максимальными показателями доходов, соответствующими наиболее рациональному распределению частотного ресурса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воронцов Ю.А.** Технико-экономическое обоснование эффективности проектов информационных систем. — М.: Инсвязьиздат, 2008. — 376 с.
2. **Дьяконов В.П.** Mathematica 5.1/5.2/6.0. Программирование и математические вычисления. — М.: ДМК Пресс, 2008. — 576 с.
3. **Котов В.И.** Радиочастотный ресурс: определение платы и оценка эффективности использования // Электросвязь. — 2008. — №9.
4. **Котов В.И.** Конверсия радиочастотного спектра с экономической точки зрения // Электросвязь. — 2008. — № 1.
5. **Половко А.М.** Mathematica для студента. — СПб.:БХВ-Петербург, 2007. — 368 с.
6. **Попов А.Н.** Оценка экономической эффективности использования радиочастотного спектра. — М.: МТУСИ ИПК, 2008. — 126 с.

Получено 20.11.08