УДК 621.391.23

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КРАТНОСТИ ОШИБОК В КАНАЛАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. В. Егоров, ведущий научный сотрудник ОАО «РИМР», к.т.н.; rimr500@mail.ru

Ключевые слова: *канал со случайными параметрами, метод Монте-Карло, распространение результатов моделирования, дискретные ортогональные преобразования.*

Задача повышения эффективности методов кодирования информации в каналах с переменными параметрами представляет собой значительный интерес при создании систем радиосвязи, и поэтому разработка новых методов оценки помехоустойчивости кодов, позволяющих существенно снизить объем вычислений и проводить многовариантный анализ, представляется весьма актуальной для практики.

При исследовании эффективности систем передачи дискретных сообщений по каналам со случайно изменяющимися параметрами широко используется в качестве характеристики дискретного канала функция кратности ошибок — вероятность появления m ошибок на отрезке сообщения, содержащем n символов. Однако обозримые аналитические выражения для функции кратности ошибок на основе моделей непрерывного канала получены лишь для некоторых частных случаев, что существенно ограничивает возможность применения этих методов при определении вероятностей ошибок при различных статистических описаниях канала. Использование дискретных моделей потока ошибок, для которых известны аналитические выражения для функции кратности ошибок, требует определения вида модели и оценки ее параметров на основе статистического описания непрерывного канала и способа приема сигналов [1], что представляет собой самостоятельную проблему. В свою очередь, прямое моделирование потока ошибок на основе моделей непрерывного канала связано с большими вычислительными затратами.

В настоящей работе предлагается метод расчета функции кратности ошибок, заключающийся в том, что искомая характеристика представляется аналитически через производящую функцию числа ошибок, усредненную по статистическим изменениям параметров канала, а получающиеся при этом многомерные интегралы вычисляются методом Монте-Карло.

Запишем выражение для производящей функции числа ошибок на отрезке сообщения длительностью n:

$$\Theta(z)=\prod_{i=1}^{n}\left((1-p_i)+p_i z\right),$$

где p_i — вероятность появления ошибки на i-м символе.

Тогда условная вероятность появления m ошибок на отрезке сообщения, содержащем n символов,

$$P(m,n\,|\,p_1,\ldots,p_n)=\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}\Theta(z)_{|z=0}.$$

Поскольку $\Theta(z)$ есть полином степени n —

$$\Theta(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k,$$

то $P(m,n\,|\,p_1,\ldots,p_n)=a_m$.

При заданных алгоритме приема и виде сигналов вероятности p_i представляют собой монотонную функцию параметра канала h_i на i-м элементе, т. е. $p_i=p(h_i)$. Если известно статистическое описание канала, искомая характеристика может быть записана в виде

$$P(m,n)=\int\cdots\int\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}\prod_{i=1}^{n}\Big((1-p(h_i))+ \\ +p(h_i)z\Big)_{|z=0}w(h_i,\ldots,h_n)\,dh_1\ldots dh_n, \qquad (1)$$

где $w(h_i,.., h_n)$ — многомерная функция плотности параметра канала h.

Тогда выражение (1) можно представить в виде:

$$P(m,n)=\int\cdots\int a_m(h_i,\ldots,h_n)\,w(h_i,\ldots,h_n)\,dh_1\ldots dh_n, \qquad (2)$$

где $a_m(h_i,.., h_n)$ — функция, определенная на векторе значений параметров канала $h(h_i,.., h_n)$.

Представление функции кратности ошибок в форме (2) является конструктивным, если известен алгоритм моделирования вектора значений параметров канала с заданными статистическими свойствами [2]. Алгоритмы цифрового моделирования последовательностей отсчетов случайных процессов, описывающих замирания в КВ радиоканале (Рэлея, Райса, Накагами и др.) хорошо известны [4]. В этом случае интеграл (2) может быть вычислен методом Монте-Карло.

При проектировании систем КВ радиосвязи часто возникает задача оценки функции кратности ошибок в каналах с различным статистическим описанием. Если при переходе к новым условиям функционирования моделирующий алгоритм остается неизменным, то задача определения показателей эффективности интерпретируется как распространение результатов моделирования на вероятностных мерах [3]. Проблема распространения результатов статистического моделирования на вероятностных мерах слабо освещена в литературе, несмотря на ее очевидную значимость для проектирования систем.

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий распространить результаты статистического моделирования для случая, когда интересующий показатель эффективности определяется как математическое ожидание функции, заданной на случайном векторе, характеризующем состояние системы, а также оценивать показатели качества системы для различных условий функционирования в единой вычислительной схеме.

Задача оценки эффективности системы может быть сведена к вычислению интеграла вида:

$$H=\int_{\Omega}\Phi(\mathrm{Y})\,\mu(d\mathrm{Y}),$$

где $\Phi(\cdot)$ — оператор системы; Ω — множество возможных значений вектора состояния системы Y; $\mu(d\mathrm{Y})$ — вероятностная мера, заданная на Ω.

При моделировании реальных систем часто возникает проблема, связанная с определением характеристик их работоспособности в различных условиях функционирования. Если при переходе к новым условиям моделирующий алгоритм, задаваемый оператором $\Phi(\cdot)$, не претерпевает изменений, указанную проблему можно рассматривать как задачу распространения результатов моделирования на мере $\mu(dY)$, полученных ранее для вероятностной меры $v(dY)$. Если мера $\mu(dY)$ абсолютно непрерывна относительно $v(dY)$, имеет место известное соотношение [3]:

$$H=\int_{\Omega}\Phi(Y)\mu(dY)=\int_{\Omega}\Phi(Y)f(Y)v(dY), \quad (3)$$

где $f(Y)=\frac{d\mu}{dv}(Y)$ — производная Радона-Никодима μ по v. Из выражения (3) вытекает, что для получения искомой оценки показателя эффективности на мере $\mu(dY)$ достаточно организовать процесс взвешенной обработки результатов статистического моделирования в соответствии с выражением

$$\hat{H}\cong\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\Phi\left(Y^{(k)}\right)f\left(Y^{(k)}\right), \quad (4)$$

где $Y^{(k)}$ — k-я реализация случайного вектора с вероятностной мерой $v(dY)$, $f(Y^{(k)})$ — значение производной Радона-Никодима на векторе $Y^{(k)}$, L — количество реализаций.

В достаточно общем случае аналитическое выражение для $f(Y)$ получить не удается. Однако, если законы распределения Y — гауссовские, выражение для производной Радона-Никодима имеет вид [3]:

$$f(Y)=\sqrt{\frac{\det(K_v)}{\det(K_\mu)}}\times \\ \times\frac{\exp\left(-\left(Y-\bar{Y}_\mu\right)^T K_\mu^{-1}\left(Y-\bar{Y}_\mu\right)\right)}{\exp\left(-\left(Y-\bar{Y}_v\right)^T K_v^{-1}\left(Y-\bar{Y}_v\right)\right)}, \quad (5)$$

где K_v, K_μ — ковариационные матрицы векторов с соответствующими распределениями, $\bar{Y}_v$, $\bar{Y}_\mu$ — средние значения случайных векторов Y_v и Y_μ.

Поскольку векторы с негауссовскими законами распределения, используемыми в теории связи, обычно формируют путем нелинейного преобразования гауссовских векторов, использование выражений (4), (5) позволяет решить задачу в достаточно общем случае. При этом в качестве вектора состояния выступает не вектор с заданным статистическим описанием, а исходный гауссовский вектор. В этом случае оператор модели в выражении (3), можно представить в виде суперпозиции:

$$\Phi=\Phi_L\circ G,$$

где Φ_L — оператор модели, входным вектором которого является вектор с требуемым статистическим описанием; G — оператор нелинейного преобразования.

Вычислительный алгоритм при использовании выражений (4) и (5) получается достаточно простым. Вместе с тем реализация взвешенной обработки требует многократного вычисления значений $f(Y)$, что связано с дополнительными вычислительными затратами, снижающими эффективность рассматриваемого подхода. Определение значений $f(Y)$, представленных в форме (5), требует вычисления квадратичных форм. Это приводит к квадратичной зависимости числа арифметических операций от размерности вектора Y. Поэтому в ряде случаев более экономично прямое моделирование системы в новых условиях. В приведенном виде возможности метода распространения результатов моделирования на вероятностных мерах для проведения многовариантного анализа систем, описываемых вектором состояния большой размерности, являются весьма ограниченными, и поэтому метод достаточно редко используется на практике.

Для преодоления указанных трудностей будем предполагать, что гауссовский центрированный случайный вектор с заданной корреляционной матрицей размерности N можно представить как результат линейного преобразования вектора некоррелированных случайных гауссовских величин размерности M ($M>N$) [6]:

$$Y=AW, \quad (6)$$

где A — матрица преобразования размерности $N\times M$; W — вектор некоррелированных центрированных случайных гауссовских величин размерности M с дисперсиями $\left\{\sigma_k^2\right\}_{k=l}^{M}$, значения которых определяются корреляционной матрицей K_Y.

Поскольку корреляционная матрица K_W вектора W является диагональной, выражение (3) может быть записано в виде:

$$H=\int_{\Omega_W}\Phi(AW)\rho_\mu(W)dW= \\ =\int_{\Omega_W}\Phi(AW)f(W)\rho_v(W)dW,$$

где $f(W)=\frac{\prod_{k=1}^{M}\frac{1}{\sigma_{\mu_k}}\exp\left(-W_k^2/\sigma_{\mu_k}^2\right)}{\prod_{k=1}^{M}\frac{1}{\sigma_{v_k}}\exp\left(-W_k^2/\sigma_{v_k}^2\right)}$,

ρ_μ, ρ_v — плотности распределения вектора W, соответствующие мерам $\mu(dY)$ и $v(dY)$; W_k — k-я координата вектора W; Ω_W — множество возможных значений вектора W.

Очевидно, что в этом случае в качестве вектора состояния модели системы выступает вектор W, а оператор модели представляет собой суперпозицию операторов Φ и A. Хотя размерность интегрирования при этом повышается, количество арифметических операций, необходимых для вычисления $f(Y)$, линейно зависит от значения M.

Реализация рассмотренного метода требует определения матрицы A по заданной матрице K_Y и для каждой реализации Y только однократного вычисления произведения матрицы на вектор. Если M возрастает с ростом N медленнее, чем по квадратичному закону, использование соотношения (4) является оправданным даже при выполнении прямого умножения матрицы на вектор, если количество вариантов расчета достаточно велико. В то же время для практической реализации предлагаемого метода необходимо иметь конструктивный алгоритм построения матрицы A по заданной корреляционной матрице K_Y. В общем случае построить такой алгоритм не удается. Однако, если вектор Y представляет собой последовательность равноотстоящих отсчетов стационарного гауссовского случайного процесса, что часто встречается на практике, можно построить алгоритм нахождения матрицы A, допускающий к тому же «быструю» реализацию операции умножения матрицы на вектор. Поскольку корреляционная матрица K_Y вектора Y в этом случае будет теплицевой, справедливо соотношение [5]:

$$K_Y=BRB^T,$$

где матрица B имеет размерность $N \times 2N$ и представлена в виде $B = [I_N \vdots O_N]$. I_N, O_N — соответственно единичная и нулевая матрицы размерности N; R — циркулянтная матрица размерности $2N \times 2N$ с порождающим вектором

$$\{r_k\}_{k=0}^{2N-1} = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{N-1}, \rho_N, \rho_{N-1}, \ldots, \rho_1);$$

ρ_k — равноотстоящие отсчеты значений корреляционной функции стационарного случайного процесса.

Циркулянтная матрица может быть представлена в виде [5]:

$$R = F^{-}\Lambda F^{+},$$

где F^{-}, F^{+} — матрицы операторов прямого и обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) размерности $2N$; $\Lambda = diag(\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{N-1}\lambda_N\lambda_{N-1} \ldots \lambda_1)$ – диагональная матрица собственных значений матрицы R, значения элементов которой определяются как ДПФ порождающего вектора.

С учетом вещественности и неотрицательности спектра последовательности отсчетов корреляционной функции матрица R может быть представлена в виде произведения:

$$R = \left(F^{-}\Lambda^{1/2}F^{+}\right)\left(F^{-}\Lambda^{1/2}F^{+}\right),$$

где $\Lambda^{1/2}$ — диагональная матрица размерности $2N \times 2N$ с элементами $\lambda_{kk} = \sqrt{\lambda_{0kk}}$.

Из изложенного выше следует:

$$BF^{-}\Lambda F^{+}\left(BF^{-}\Lambda F^{+}\right)^T = K_Y.$$

Тогда алгоритм моделирования гауссовского случайного вектора размерности N с теплицевой матрицей K_Y будет иметь вид:

$$Y = BF^{-}\Lambda F^{+}V, \tag{7}$$

где V — вектор размерности $2N$ вещественных некоррелированных гауссовских случайных величин с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями.

Поскольку F^{+} — ортогональная матрица, вектор $W = \Lambda^{1/2}F^{+}V$ представляет собой совокупность комплексных центрированных случайных величин с дисперсиями, равными $\{\lambda_k\}_{k=0}^{2N-1}$, удовлетворяющий условию комплексной сопряженности $W_k = W_{2N-k}^{*}$. Алгоритм (7) можно представить в форме, эквивалентной (6):

$$Y = AW,$$

где искомая матрица A представляет собой произведение матриц B и F^{-}.

Предложенный алгоритм моделирования вектора равноотстоящих отсчетов стационарного гауссовского процесса весьма экономичен, поскольку для вычисления произведения матрицы A на вектор W можно воспользоваться алгоритмом быстрого преобразования Фурье и тем самым избежать операции прямого умножения матрицы на вектор. При этом необходимое число арифметических операций, затрачиваемых на формирование случайного вектора размерности N, равно $2N\log_2(2N)$, а вычислительные затраты на расчет $f(Y)$ пропорциональны N.

Следует отметить, что для формирования действительного случайного вектора возникает необходимость выполнения операций с комплексными числами, поскольку матрица A и вектор W являются комплексными, что связано с дополнительными вычислительными затратами. Чтобы избежать операций с комплексными числами, можно воспользоваться дискретным преобразованием Хартли (ДПХ), которое определяется матрицей [7]:

$$H = \{H_{lk}\}_{l,k=0}^{N-1} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}lk\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{N}lk\right)\right].$$

Матрица преобразования Хартли связана с матрицей обратного ДПФ соотношением [6]:

$$F^{-} = HP, \tag{8}$$

где $P = \left(\frac{1+i}{2}\right)I + \left(\frac{1+i}{2}\right)Q$; $I = \{\delta_{lk}\}_{l,k=0}^{N-1}$ — единичная матрица; δ_{lk} — символ Кронекера, $i = \sqrt{-1}$, Q — матрица перестановок с элементами

$$\{Q_{lk}\} = \begin{cases} \delta_{lk}: & k = 0 \\ \delta_{l,N-k}: & k = 1, N-1. \end{cases}$$

Подставляя (8) в (7) и учитывая комплексную сопряженность симметричных компонент спектра вектора W, получим:

$$Y = BHV,$$

где $V = PW$ — спектр в базисе Хартли последовательности действительных гауссовских чисел.

Путем несложных алгебраических преобразований можно показать [8], что случайный вектор $V = \{V_l\}_{l=0}^{N-1}$ является действительным и удовлетворяет условию:

$$E\{V_k\} = 0, E\{V_kV_m\} = 2\lambda_k\delta_{km},$$

где $E\{\cdot\}$ — символ математического ожидания. Отсюда следует, что вектор Y размерности N может быть получен в соответствии с алгоритмом:

$$Y = BHV, \tag{9}$$

где V — вектор действительных некоррелированных гауссовских центрированных случайных величин размерности $2N$ с дисперсиями $\{2\lambda_k\}$.

Поскольку для реализации дискретного преобразования Хартли известны алгоритмы, требующие в 3—4 раза меньше временных затрат и в 2 раза меньшего объема оперативной памяти, чем для реализации ДПФ, алгоритм (9) оказывается более эффективным чем (8) в вычислительном плане.

Предложенный в данной работе подход к задаче распространения результатов статистического моделирования сложных систем на гауссовских мерах и разработанные для обеспечения этого метода алгоритмы являются весьма экономичными и легко программно реализуются.

Применительно к поставленной выше задаче определения функции кратности ошибок при последовательном вычислении полинома $\Theta(z)$ удается, используя описанный выше подход, построить в единой вычислительной схеме совокупность $P(m, n)$ характеристик для разных m и n в каналах с различным статистическим описанием. Полученные алгоритмы позволяют на порядок и более снизить объем вычислительных затрат и определить показатели помехоустойчивости кодов в каналах с различными видами замираний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Блох Э.Л., Попов О.В., Турин В.Я.** Модель источника ошибок в каналах передачи цифровой информации.— М.: Связь, 1971.
2. **Ермаков С.М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы.— М.: Наука, 1975.
3. **Железнов И.Г.** Сложные технические системы (оценка характеристик).— М.: Высшая школа, 1984.
4. **Бакалов В.П.** Цифровое моделирование случайных процессов.— М.: САЙНС-ПРЕСС, 2002.
5. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления.— М.: Наука, 1984.
6. **Алексеев О.А., Егоров В.В.** Моделирование гауссовского сигнала методом дискретных ортогональных преобразований//Радиотехника и электроника, 1988. Т. 33, С. 643—646.
7. **Брейсуэлл Р.** Преобразование Хартли.— М.: Мир, 1990.
8. **Гут Р.Э., Егоров В.В.** О формировании псевдослучайных коррелированных чисел Гаусса//Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27.— № 12.— С. 1888—1889.

Получено 26.02.10