УДК 621.391

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ ЦИФРОВОГО ТЕЛЕТРАФИКА

А. М. Александров, заместитель начальника Центра анализа и экспертизы ФГУП «НПО «Импульс», д. т.н., профессор; npoimpuls@peterlink.ru

Ключевые слова: *телетрафик, система массового обслуживания, самоподобный процесс, случайный поток, рандомизированная модель, буфер, отказ, очередь.*

Введение. Потоки информации, циркулирующие в телекоммуникационных системах, характеризуются большим разнообразием, которое определяется типом источника информации, сетевыми протоколами, параметрами технических средств, в том числе каналов связи, и т. д. [1].

Наряду с традиционными, пуассоновскими моделями этих потоков, отличающимися простотой и отсутствием статистической зависимости между событиями (потоки без последействия), активно изучаются модели на основе самоподобных случайных процессов. Данные процессы обладают рядом характерных признаков — наличием корреляции между случайными событиями, выразившейся, в частности, в группировании событий в пачки, «длинными (тяжелыми) хвостами» функций распределения интервалов между событиями и др.

Модели обобщенного пуассоновского потока. Одна из математических моделей самоподобного процесса — фрактальное броуновское движение [2—4]. Другой математической моделью случайного потока, отражающей статистические свойства, может быть так называемый обобщенный (рандомизированный) пуассоновский поток (ОПП), параметр которого является случайной величиной с соответствующей функцией распределения [5, 6].

Пусть $t_1, t_2,.., t_n$ — последовательность непересекающихся интервалов времени, $N(t_i)$ — количество событий, появившихся в интервале t_i. В этом случае распределение вероятностей числа событий ОПП, появившихся в этих интервалах, определяется формулой

$$\upsilon_{\vec{k}}(\vec{t}) = P\{N(t_1)=k_1,\ldots,N(t_n)=k_n\} = \int\limits_0^\infty \prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda t_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda t_i} dF(\lambda), \qquad (1)$$

где $\vec{k}=\{k_1,\ldots,k_n\}$; $\vec{t}=\{t_1,\ldots,t_n\}$; $F(\lambda)$ — функция распределения случайного параметра исходного, порождающего пуассоновского потока.

Модели ОПП позволяют учитывать зависимость между событиями не только внутри интервала t_i, но и между интервалами, а также группирование событий в пачки.

Как следует из [5—7], модели ОПП описывают распределение числа ошибок в дискретных каналах связи. В частности, для телефонного тропосферного канала вероятность $\nu_0(t)$ имеет вид гиперболы

$$\nu_0(t) = (a/(a+t))^{\nu}. \qquad (2)$$

Исходя из этого функция распределения интервалов между событиями (ошибками) потока может быть представлена (на основе функции Пальма—Хинчина [8]) в виде

$$\varphi(t) = (a/(a+t))^{\nu+1}, \qquad (3)$$

где a и ν — параметры потока.

Частным случаем функции (3) является распределение Парето.

Нетрудно увидеть, что выражение (2) представляет собой преобразование Лапласа—Стильтьеса функции $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \gamma(a\lambda, \nu), \qquad (4)$$

где $\gamma(t,\beta) = 1/\Gamma(\beta)\int\limits_0^t x^{\beta-1}e^{-x}dx$ — неполная γ-функция.

В качестве примера в табл. 1 приведены взятые из [5] численные значения распределения числа ошибок $\nu_k(t)$ для тропосферного телефонного канала, рассчитанные по рекуррентной формуле

$$\nu_{k+1} = [(\nu+k)t/(k+1)][a/(a+t)]\nu_k(t),\ k \geq 0,$$

основанной на (1) и (2), при условии

$$\nu_k(t) = (-1)^k (d^k \nu_0(t)/dt^k)(t^k/k!).$$

В табл. 1 также представлены значения этого же распределения, полученные экспериментальным путем $\bar{\nu}_k(t)$ и на основе модели с независимыми ошибками, т. е. модели двоично-симметричного канала (ДСК).

Размер пакета n = 128 бит; $t = nT$; T^{-1} — скорость канала; $P_{\text{ош}} = 9 \cdot 10^{-4}$; $\nu = 0{,}0004$; $\alpha = 0{,}00354$.

Из таблицы видно, что распределение числа ошибок в пакете имеет «длинный хвост».

Применение этой модели в теории телетрафика позволяет решить новые задачи [9]. Наличие статистической зависимости между пакетами информации, передаваемыми по каналам связи, не дает возможности непосредственно использовать результаты классической теории массового обслуживания, требующие взаимной независимости этих пакетов.

Системы массового обслуживания. В [9] рассмотрены системы массового обслуживания (СМО), где допускается произвольная зависимость между случайными величинами, образующими цикл занятости (промежуток времени между периодом незанятости и следующим за ним периодом занятости).

Однако циклы занятости между собой взаимно независимы. В этом случае СМО получили название регенерирующих систем. Исследованы регенерирующие системы, где случайные величины, образующие цикл занятости, зависят

Таблица 1

Модель	k								
	0	1	2	3	4	6	8	11	15
ν_k	0,99630	0,00352	0,00171	0,00110	0,00080	0,00050	0,00035	0,00024	0,00015
$\bar{\nu}_k$	0,98705	0,00408	0,00184	0,00120	0,00085	0,00048	0,00031	0,00019	0,00012
ДСК	0,89487	0,09945	0,00552	0,00020	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

от некоторого параметра α, являющегося случайным с соответствующей функцией распределения. Такую СМО называют рандомизированной системой, а исходную систему (с фиксированными параметрами) — порождающей.

Пусть q_i для регенерирующей рандомизированной системы, а $q_i^*(\alpha)$ для порождающей системы есть вероятность того, что в момент поступления заявки в системе находится именно i заявок.

В [9] показано:

$$q_i = q_0 \int\limits_{w_\alpha} q_i^*(\alpha)\left[q_0^*(\alpha)\right]^{-1} dF(\alpha), \qquad (5)$$

где q_0 определяется из условия нормировки; $F(\alpha)$ — функция распределения случайного параметра, определяющая случайные величины, образующие цикл занятости.

Таким образом, если известны распределение вероятностей состояний порождающей системы $q_i^*(\alpha)$ и функция распределения случайного параметра $F(\alpha)$, то с помощью формулы (5) можно получить распределение q_i исследуемой системы. Например, в качестве порождающей системы могут быть использованы многочисленные результаты для классических марковских систем M|M|n с соответствующей дисциплиной обслуживания.

Один из результатов для системы с ограниченной очередью можно представить в виде

$$q_i^*(\alpha) = \begin{cases} \alpha^i / i!\, q_0^*(\alpha), & 0 \le i \le n; \\ \alpha^i / \left(n!\, n^{i-n}\right) q_0^*(\alpha), & n \le i \le n+k, \end{cases} \qquad (6)$$

где $\alpha = \lambda\tau$ — загрузка системы; λ — интенсивность входящего потока; τ — среднее время обслуживания; n — количество обслуживающих приборов; k — размер буфера.

Допустим, что случайным является только параметр входящего потока, его функция распределения имеет вид (4), а параметр τ остается фиксированной величиной. Тогда из (5) и (6) получаем

$$q_i = \begin{cases} q_0 \rho^i \Gamma(\nu+i) / \Gamma(\nu), & i \le n; \\ q_0 \rho^i \Gamma(\nu+i) / n!\, n^{i-n} \Gamma(\nu)), & n \le i \le n+k, \end{cases} \qquad (7)$$

где $\rho = \nu\tau/a$ — загрузка системы.

Если $n = 1$, то из (7) следует

$$q_{1+k} = \rho^{1+k} \Gamma(\nu+k) / \Gamma(\nu) \left[\sum_{i=0}^{k+1} \rho^i \Gamma(\nu+i) / \Gamma(\nu)\right]^{-1}. \qquad (8)$$

Если $\nu = 1$, то, принимая во внимание, что $\Gamma(i+1) = i!$, из (7) получим

$$q_i = \begin{cases} i!\, \rho^i q_0, & 0 \le i \le n; \\ i!\, \rho^i q_0 / (n!\, n^{i-n}), & n \le i \le n+k. \end{cases} \qquad (9)$$

Для $n = 1$ из формулы (9)

$$q_i = i!\, \rho^i \Big/ \sum_{s=0}^{k+1} s!\, \rho^s. \qquad (10)$$

В табл. 2 приведены значения вероятностей отказа в обслуживании вызовов $p_{\text{от}} = q_{1+k}$ из-за переполненного буфера, рассчитанные по формуле (10) для $\rho = 0{,}25$, и для сравнения — значения вероятностей отказа для классической СМО:

$$p_{\text{от}}^* = q_{1+k}^* = \rho^{1+k} \Big/ \sum_{i=0}^{k+1} \rho^i.$$

Из таблицы следует, что наличие статистической зависимости может резко снизить пропускную способность системы, а увеличение размера буфера не всегда приводит к снижению вероятности отказа, хотя загрузка системы $\rho < 1$.

Таблица 2

Модель	k						
	0	1	2	3	4	5	6
$p_{\text{от}} = q_{1+k}$	0,200	0,091	0,064	0,060	0,069	0,094	0,142
$p_{\text{от}}^* = q_{1+k}^*$	0,200	0,048	0,012	0,002	0,001	0,000	0,000

Рассмотрим однолинейную СМО с неограниченной очередью, на вход которой поступает пуассоновский поток с фиксированным параметром λ. Время обслуживания распределено по показательному закону, но его параметр τ (среднее время обслуживания) является случайной величиной, принимающей значения τ_j с вероятностью p_j, $j = \overline{1,k}$, $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.

Таким образом, функция распределения времени обслуживания может быть представлена в виде гиперэкспоненты со случайными параметрами τ_j:

$$p\{t_{\text{обс}} > t\} = H(t) = \sum_{j=1}^{k} p_j \mathrm{e}^{-\mu_j t}, \ \ \mu_j^{-1} = \tau_j. \qquad (11)$$

В результате имеем порождающую систему в виде классической СМО M|M|1 с неограниченной очередью, для которой распределение вероятностей состояний определяется известной формулой $q_j^* = \rho^i(1-\rho)$, $\rho = \lambda\tau$.

Затем с помощью (5) получаем распределение вероятности состояний для рандомизированной системы

$$q_i = q_0 \sum_{j=1}^{k} p_j \rho_j^i, \ \ \rho_j = \lambda\tau_j, \ \ j = \overline{1,k};$$
$$q_0 = \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{p_j}{1-\rho_j}\right]^{-1}. \qquad (12)$$

Отсюда определяем среднее количество заявок в системе:

$$\bar{q} = \sum_{i=0}^{\infty} i q_i = q_0 \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\rho_j}{(1-\rho_j)^2}, \ \ \rho_j < 1, \ \ j = \overline{1,k}. \qquad (13)$$

Рассмотрим частный случай. При $k = 2$

$$\bar{q} = \left[\frac{p_1}{1-\rho_1} + \frac{p_2}{1-\rho_2}\right]^{-1} \left[\frac{p_1\rho_1}{(1-\rho_1)^2} + \frac{p_2\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\right], \ \ p_1 + p_2 = 1. \qquad (14)$$

Уравнение (14) определяет среднее количество заявок в системе, где времена обслуживания последовательности заявок не являются независимыми (как это обычно принимается) и связаны статистической зависимостью.

Сравним результаты, полученные с помощью (14), с аналогичными результатами, определяющими среднее количество заявок в классической СМО с неограниченной очередью M|G|1, где времена обслуживания имеют функцию распределения (11), но статистически взаимно независимы, другими словами, имеем систему, в которой время обслуживания распределено по гиперэкспоненциальному закону (11). Используя формулу Поллячека—Хинчина [8] и гиперэкспоненту (11), для данной системы получим

Таблица 3

Модель	ρ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,85
$\bar{q}_R$	0,235	0,322	0,457	0,667	1,044	1,790	3,670	6,120	13,67	∞
$\bar{q}_H$	0,144	0,267	0,433	0,667	1,010	1,530	2,430	3,160	4,27	6,11
$\bar{q}_M$	0,111	0,250	0,428	0,667	1,000	1,500	2,330	3,000	4,00	5,67

$$\begin{gathered}\bar{q}=\left[\rho+p_1p_2(\rho_1-\rho_2)^2\right]/(1-\rho),\\ \rho=p_1\rho_1+p_2\rho_2,\ \rho_i=\lambda\tau_i,\ i=1,2.\end{gathered}\qquad(15)$$

В табл. 3 приведены численные значения среднего количества заявок в рандомизированной модели $\bar{q}_R$, определенные по (14), и в классической системе с гиперэкспоненциальным обслуживанием $\bar{q}_H$, определенные по (15), а также в порождающей системе M|M|1, рассчитанные по формуле $\bar{q}_M=\rho/(1-\rho)$. При расчетах принято $p_1 = 0{,}25$ и $\rho_1 = 0{,}4$.

Из табл. 3 следует, что наличие статистической зависимости между временами обслуживания заметно ухудшает качество обслуживания по сравнению с такой же системой, где эта зависимость отсутствует.

Выводы.

1. Модели телетрафика, имеющие признаки самоподобных процессов, могут быть представлены рандомизированными моделями.

2. Рандомизированная модель представляет собой порождающую систему со случайными значениями ее параметров.

3. Законы распределения случайных параметров порождающей системы могут быть определены, в частности, с помощью обратного преобразования Лапласа–Стильтьеса функций распределения случайных величин, описывающих регенерирующую систему.

4. Основные результаты реализованы в корпоративных сетях силовых ведомств РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А.М.** Безопасность сетей связи и некоторые задачи теории телетрафика//Электросвязь.— 2003.— № 12.— С. 20—21.
2. **Mandelbrat B., Van Ness J.W.** Fractional Brownian motions, fractional noises and applications//SIAM Review, 10.— 1968.— P. 264—282.
3. **Norros I.** A Storage model with self-similar input//Queueing Systems.— 1994.— V. 16.— P. 1—9.
4. **Нейман В.И.** Новые направления в теории телетрафика//Электросвязь.— 1998.— № 7.— С. 27—30.
5. **Аксенов Б.Е., Александров А.М.** Об одном методе исследования потоков ошибок в каналах связи//Проблемы передачи информации.— 1968.— № 4.— С. 79—83.
6. **Аксенов Б.Е. Александров А.М.** Повышение достоверности передачи информации в системах управления: Учебное пособие для вузов.— Л.: ЛПИ им. М.И. Калинина, 1981.— С. 77.
7. **Аксенов Б.Е., Александров А.М., Баканов А.Н.** Применение обобщенного пуассоновского потока к исследованию методов повышения достоверности//Проблемы передачи информации.— 1973.— № 3.— С. 80—86.
8. **Хинчин А.Я.** Математические методы теории массового обслуживания.— М.: Физматгиз, 1963.— С. 149.
9. **Александров А.М.** Один метод исследования систем массового обслуживания//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1971.— № 3.— С. 105—115.

Получено 23.03.10

Автор благодарит профессора Б.И. Кузьмина за помощь в подготовке статьи к изданию.

ИНФОРМАЦИЯ

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ НОРМАТИВНОГО ПРАВОВОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЯМИ ЭЛЕКТРОСВЯЗИ

Министерство связи и массовых коммуникаций Российской Федерации на базе ФГУП ЦНИИС провело в июне 6-ю международную конференцию «Управление сетями электросвязи». Организатор конференции — ЗАО «Экспо-Телеком».

Открыл конференцию заместитель директора Департамента государственной политики в области связи Минкомсвязи Российской Федерации **А.Н. Першов**. Он зачитал приветствие заместителя министра связи и массовых коммуникаций России **Н.С. Мардера**, в котором отмечено, что «управление сетями электросвязи должно осуществляться в строгом соответствии с требованиями нормативных правовых актов, устанавливающих порядок взаимодействия операторов связи и требования к применяемым средствам управления, которые в настоящее время разрабатываются Минкомсвязи России».

Говоря об основных направлениях совершенствования нормативного правового регулирования вопросов управления сетями электросвязи, А.Н. Першов призвал участников конференции к открытому обсуждению уже действующих нормативных правовых актов (приказ № 146 от 06.11.2009 г. «Об утверждении порядка предоставления операторами связи информации о технологических возможностях своих сетей связи, перспективах их развития, средствах и линиях связи, условиях оказания услуг связи, а также о применяемых тарифах и расчетных таксах»), а также вновь разрабатываемых документов.

Порядок представления в Россвязь информации о технологических возможностях сетей связи подробно осветил заместитель начальника Управления государственных услуг в сфере развития сетей связи Россвязи **О.Е. Васильев**.

Основные положения Концепции создания системы централизованного управления ССОП ЕСЭ России были изложены в докладе **А.А. Костина** (СПбГУТ), **А.С. Кремера** (АДЭ), **А.Н. Першова**. Отдельные тенденции в области управления телекоммуникациями рассматривались в докладе **А.А. Костина и А.К. Шустрова** (СПбГУТ). Концепцию совершенствования и развития автоматизированных систем управления информационно-телекоммуникационными сетями специального назначения представили **А.М. Лихачев** и **А.В. Шестаков** (ФГУП НИИ «Рубин»).

В ходе двух пленарных заседаний — «Стратегические направления развития систем управления сетями электросвязи» и «Технологии реализации управления сетями электросвязи; расширение функций управления в процессе эволюции сетей связи; анализ действующих систем управления» — были рассмотрены основные вопросы управления сетями связи. Это особенности управления конкретными сетями и системами связи, новые технологии и архитектуры в сетевом управлении, создание и обеспечение функционирования систем управления сетями связи, классификация и кодирование систем и средств связи как базовой подсистемы обеспечения функционирования систем управления сетями связи и эффективного функционирования единой сети связи.