

УДК 621.396.674.3

Печатается в порядке обсуждения

## ФИЗИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АНТЕНН

**В.А. Неганов**, заведующий кафедрой ОКИТ РТС Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ),

д.ф.-м.н.; neganov-samara@yandex.ru

**Д.П. Табаков**, ассистент кафедры ОКИТ РТС ПГУТИ, к.ф.-м.н.

**Д.С. Клюев**, доцент кафедры ОКИТ РТС ПГУТИ, к.ф.-м.н.

**Ключевые слова:** антенна, электрический вибратор, некорректная задача, электромагнитное поле, сингулярное интегральное уравнение.

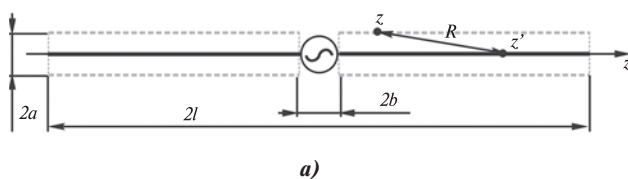
**Введение.** Под некорректными задачами теории антенн следует понимать задачи, в которых нарушаются основные принципы электродинамики. Некорректность поставленных задач обусловлена несколькими факторами. Один из них – несамосогласованность физических моделей задач [1], заключающаяся прежде всего в использовании тонкопроводящего приближения, что приводит к невозможности записи общепринятой связи между продольной поверхностной плотностью тока  $\eta_z$  на антенне и напряженностью магнитного поля:  $\eta_z = H_\varphi$ . Пример – несамосогласованные физические модели тонкого электрического вибратора и диполя Герца.

Второй фактор – некорректная математическая модель структуры. Неправомочные математические выкладки применительно даже к самосогласованной физической модели структуры также могут привести к отсутствию предельного перехода интегральных представлений электромагнитных полей (ЭМП) к поверхностным плотностям электрического тока  $\vec{\eta}^e = [\vec{H}, \vec{n}_0]$  и магнитного тока  $\vec{\eta}^m = [\vec{n}_0, \vec{E}]$  на базовой поверхности  $S(\vec{n}_0$  – внешняя нормаль к поверхности  $S$ ).

Наконец, некорректность может быть обусловлена использованием несамосогласованных математических моделей интегральных представлений электромагнитного поля вблизи базовой поверхности  $S$ , на которой сформулированы сингулярные интегральные уравнения (СИУ) для корректного определения на ней поверхностных плотностей электрического и магнитного токов.

В данной статье рассмотрены две физические модели классической излучающей структуры – тонкого электрического вибратора, приведены соответствующие им математические модели в виде интегральных уравнений, записанных относительно тока в вибраторе, и представлены сравнения численных решений этих интегральных уравнений.

**Интегральные уравнения Халлена и Поклингтона.** Интегральное уравнение (ИУ) Халлена часто применяется для расчета распределения излучающего тока и входного сопротивления вибраторных антенн. Записанное относительно полного тока  $I(z)$  на симметричном вибраторе, оно имеет вид [2] ( $z \in [-l; l]$ ):



$$\int_{-l}^l I(z')G(z, z')dz' = C \cos kz - i \frac{2\pi U}{W_c} \sin k|z|, \quad (1)$$

где  $G(z, z') = e^{-ikR(z, z')} / R(z, z')$  – ядро ИУ;  $R(z, z') = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$  – расстояние между точкой источника  $q(\rho' = 0, z')$ , расположенной на оси вибратора, и точкой наблюдения  $p(\rho = a, z)$ , находящейся на идеально проводящей цилиндрической поверхности;  $W_c$  – характеристическое сопротивление среды;  $a$  – радиус цилиндра;  $C$  – неизвестная постоянная;  $k = 2\pi / \lambda$  – волновое число.

Физическая модель симметричного электрического вибратора (тонкопроводящая модель), соответствующая ИУ Халлена, приведена на рис. 1, а. Показан фактически искусственно введенный разрыв (пространственное разнесение) между током проводимости на нити  $\rho = 0$  и полем на идеально проводящей цилиндрической поверхности  $\rho = a$ .

Более того, у бесконечно тонкой нити тока поверхности как таковой не существует, а зазор, в который помещен генератор сторонней переменной ЭДС с соответствующим ему напряжением  $U$ , имеет бесконечно малую ширину:  $2b \rightarrow 0$ . В некоторых случаях подобные допущения приводят к неустойчивости и физической неадекватности решения [1]. Несмотря на это, у ИУ Халлена (1) есть несомненное достоинство – простое выражение для ядра уравнения.

Для данной физической модели можно получить в известном смысле более общее, но также физически некорректное ИУ Поклингтона [2] ( $z \in [-l; l]$ ):

$$\int_{-l}^l I(z') \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) G(z, z') dz' = \frac{4\pi}{iW_c} E^{ct}(z), \quad (2)$$

где  $E^{ct}(z)$  – напряженность электрического поля, создаваемая генератором сторонней ЭДС и равная нулю всюду, за исключением области зазора:

$$E_i^{ct}(z) = \frac{1}{2b} \begin{cases} 1, & z \in [-b; b], \\ 0, & z \notin [-b; b]. \end{cases}$$

**Некорректные интегральные представления электромагнитного поля.** Рассмотрим электромагнитное поле, создаваемое некорректной моделью антенны. В цилиндрической системе координат оно будет иметь лишь три компоненты –  $E_\rho, E_z$  и  $H_\varphi$ :

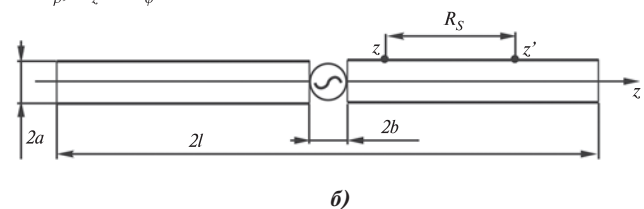


Рис. 1

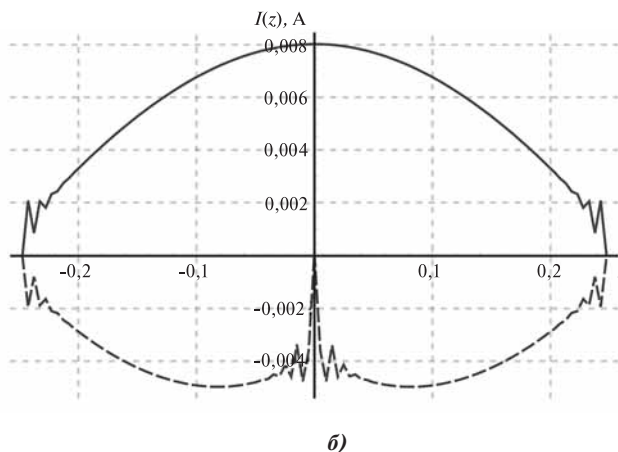
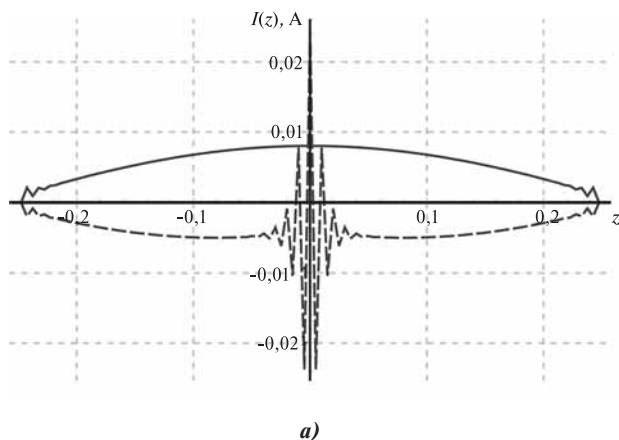


Рис. 2

$$\left. \begin{aligned} E_\rho(\rho, z) &= \frac{W_c}{4\pi i} \int_{-l}^l I(z') \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}{k\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} dz'; \\ E_z(\rho, z) &= \frac{W_c}{4\pi i} \int_{-l}^l I(z') \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}{k\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} dz'; \\ H_\phi(\rho, z) &= -\frac{k}{4\pi} \int_{-l}^l I(z') \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}{k\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} dz'. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Видно, что при  $\rho = 0$  интегралы расходятся, т.е. на нити с током обратный переход от тока к полю  $\{E_\rho, E_z, H_\phi\}$  невозможен, а при  $\rho = a$  устранимые особенности отсутствуют. Таким образом, тонкопроволочное приближение – одна из причин разрыва по полю в ближней зоне антенны.

**Физическая регуляризация задач теории антенн.** Метод физической регуляризации (МФР) предполагает учет всех физических аспектов решаемой задачи. Первый, наиболее просто реализуемый пункт МФР связан с учетом конечной ширины зазора, куда помещен генератор сторонней ЭДС. Используя этот метод, можно получить интегральное уравнение ( $z \in [-l; l]$ ):

$$\int_{-l}^l I(z') G(z, z') dz' = C \cos kz - i \frac{2\pi U}{kbW_c} \psi(z), \quad (4)$$

где

$$\psi(z) = \begin{cases} 1 - \cos(kb) \cos(kz), & z \in [-b, b]; \\ \sin kb \sin k|z|, & z \notin [-b, b]. \end{cases}$$

Такую регуляризацию можно назвать частичной, поскольку она сводится только к корректному возбуждению тока. Это интегральное уравнение эквивалентно ИУ Поклингтона (2), также учитывающему конечность ширины зазора. Данный подход рассмотрен в [2], но, к сожалению, без численных результатов. Сравнительные результаты расчетов по ИУ (2) и (4) для полуволнового вибратора приведены на рис. 2:  $a$  – с бесконечно узким зазором;  $b$  – с зазором шириной  $0,01\lambda$ ; сплошные кривые –  $\text{Re } I(z)$ , штриховые кривые –  $\text{Im } I(z)$ ;  $\lambda = 1\text{ м}$ ,  $a = \lambda/100$ ,  $N = 101$ . Расчеты производились методом сшивания в  $N$  дискретных точках [3]. Учет ширины зазора позволяет увеличить радиус  $a$  рассчитываемого вибратора при сохранении устойчивости результатов. Тем не менее из-за некорректности используемой модели назвать такой способ корректным нельзя.

Второй, наиболее эффективный пункт МФР – использование трубчатой модели вибратора (см. рис. 1,б). В этом случае поверхность протекания тока совмещается с поверхностью наблюдения, что соответствует переходу от ИУ По-

лингтона и Халлена к сингулярным интегральным уравнениям. Для электрического вибратора можно получить СИУ с логарифмической и гиперсингулярной особенностями, записанное относительно полного тока  $I(z')$ , ( $z \in [-l; l]$ ):

$$\int_{-l}^l I(z') R(z, z') dz' + \int_{-l}^l I(z') \ln|z - z'| dz' + \int_{-l}^l \frac{I(z')}{(z - z')^2} dz' = \sigma E^{\text{ct}}(z), \quad (5)$$

где  $R(z, z')$  – регулярное ядро СИУ;  $\sigma$  – константа.

Для трубчатой модели также можно получить сингулярное интегральное уравнение особенностью типа Коши, записанное относительно производной тока  $J(z) = dI(z)/dz$  ( $z \in [-l; l]$ ):

$$\int_{-l}^l J(z') R(z, z') dz' + \int_{-l}^l \frac{J(z')}{z - z'} dz' = \sigma E^{\text{ct}}(z), \quad (6)$$

где  $R(z, z')$  – регулярное ядро СИУ;  $\sigma$  – константа. Сингулярное интегральное уравнение (6) было получено одним из авторов данной статьи для трубчатой модели вибратора (см. рис. 1,б).

Трубчатая модель физически корректна, и проблем с устойчивостью при решении полученного СИУ не возникает. Его недостаток – относительная сложность выражения ядра.

На рис. 3 приведены сравнительные результаты расчетов интегральных уравнений для полуволнового вибратора:  $a$  – ИУ Халлена с конечным зазором;  $b$  – СИУ: сплошные кривые –  $\text{Re } I(z)$ , штриховые кривые –  $\text{Im } I(z)$ ;  $\lambda = 1\text{ м}$ ;  $a = \lambda/75$ ;  $N = 101$ ;  $2b = 0,01\lambda$ . Расчеты также производились методом сшивания в дискретных точках.

Наконец, третьим пунктом физической регуляризации является учет конечной проводимости металла. Для тонкостенной модели трубчатого вибратора было получено интегральное уравнение

$$\nu I(z) + \int_{-l}^l I(z') G(z, z') dz' = C \cos kz - i \frac{2\pi U}{kbW_c} \psi(z),$$

где  $\nu$  – некоторая константа. Толщина стенок выбиралась меньшей или равной толщине скин-слоя на заданной частоте. Расчеты показали, что для хороших проводников учет проводимости практически не влияет на конечные результаты.

**Сингулярные интегральные представления электромагнитного поля.** Для трубчатой модели в [4] записаны сингулярные интегральные представления электромагнитного поля (СИП ЭМП [1]):

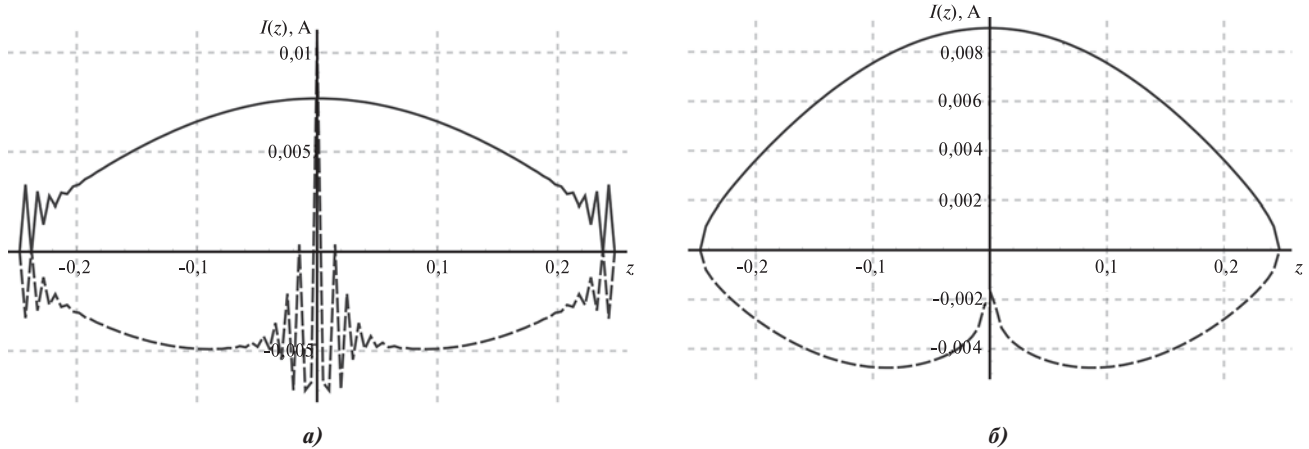


Рис. 3

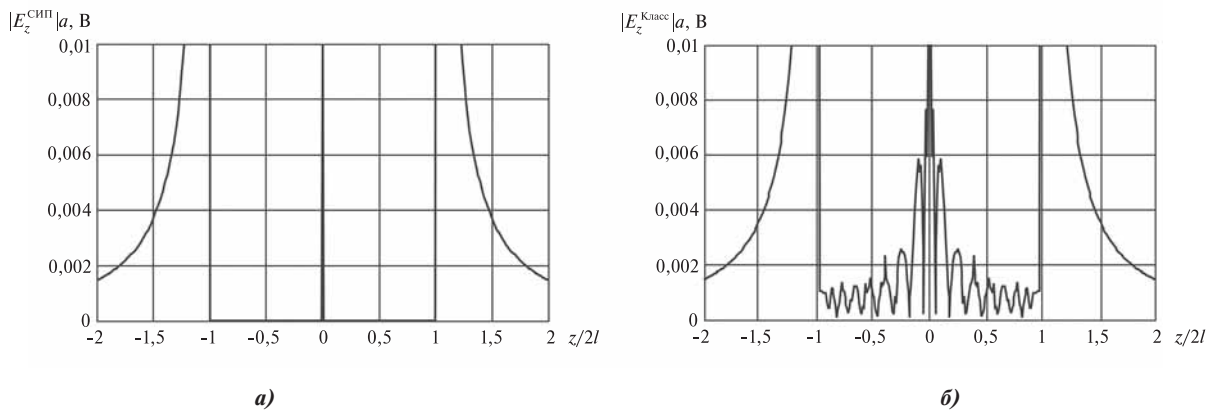


Рис. 4

$$\left. \begin{aligned} E_i(\rho, z) &= \int_{-l}^l J(z') [G_i(\rho, z - z') + S_i(\rho, z - z')] dz', i \equiv \rho, z; \\ H_\phi(\rho, z) &= \int_{-l}^l I(z') [G_\phi(\rho, z - z') + S_\phi(\rho, z - z')] dz', \end{aligned} \right\} (7)$$

где  $G$  – регулярные ядра;  $S$  – сингулярные ядра ( $S(\rho \rightarrow a, z \rightarrow z') \rightarrow \infty$ ). Следует отметить, что для (7) при  $\rho = a, z \in [-l; l]$  аналитически точно выполняются граничные условия:

$$\begin{aligned} H_\phi(a, z) &= \eta_z^e(z); \quad E_\rho(a, z) = -\frac{1}{i\omega\epsilon_a} \frac{\partial \eta_z^e(z)}{\partial z}; \\ E_z(a, z) &= -E_z^{ct}(a, z), \end{aligned}$$

а СИП ЭМП для  $E_z$  переходит в СИУ (6), тогда как в (3) этого принципиально не наблюдается.

На рис. 4 представлены численные результаты сравнительного расчета компоненты  $E_z$  на поверхности трубчатого вибратора с помощью двух типов ядер – ядра с особенностью Коши, полученного для трубчатой модели вибратора методом СИП (а), и некорректного ядра, полученного в тонкопроволочном приближении (б);  $2l = 0,5\lambda$ . В расчетах применялся ток, рассчитанный с помощью СИУ (6). Анализ рисунков показывает, что при использовании некорректного ядра граничное условие на поверхности вибратора не выполняется.

**Заключение.** Таким образом, на основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы. Использование метода физической регуляризации (МФР) электродинамических задач приводит к корректным математическим моделям антенн. Получаемые в этом случае сингулярные интегральные уравнения имеют устойчивое и физически адекватное решение.

Физическая модель в виде бесконечно тонкой нити с током не может применяться для расчетов в ближней зоне антенны, поскольку ее использование приводит к некорректным задачам (и не только по Адамару) [5] для вибраторных антенн (математическим моделям в виде ИУ Поклингтона и Халлена). Это обуславливает разрыв между объемной плотностью тока проводимости и напряженностями электромагнитного поля.

Предложенная в качестве альтернативы трубчатая физическая модель электрического вибратора приводит к математической модели в виде сингулярных интегральных уравнений, которые в совокупности с СИП позволяют корректно анализировать электромагнитное поле в ближней зоне антенны. При анализе дальней зоны некорректных задач не возникает и физическая регуляризация не требуется.

Предложенная в качестве альтернативы трубчатая физическая модель электрического вибратора приводит к математической модели в виде сингулярных интегральных уравнений, которые в совокупности с СИП позволяют корректно анализировать электромагнитное поле в ближней зоне антенны. При анализе дальней зоны некорректных задач не возникает и физическая регуляризация не требуется.

ЛИТЕРАТУРА

- Неганов В.А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики. – М.: Сайнс-Пресс, 2008.
- Неганов В.А., Павловская Э.А., Яровой Г.П. Излучение и дифракция электромагнитных волн. – М.: Радио и связь, 2004.
- Вычислительные методы в электродинамике / Под. ред. Р. Митры. – М.: Мир, 1977.
- Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П. Современная теория и практические применения антенн / Под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.