УДК 621.376.6

СОВМЕСТНАЯ СЛЕПАЯ ОЦЕНКА ЧАСТОТЫ И ФАЗЫ КАМ-СИГНАЛОВ ПУТЕМ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ПРАВДОПОДОБИЯ

А.В. Петров, аспирант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» (СПбГЭТУ)
А.Б. Сергиенко, доцент СПбГЭТУ «ЛЭТИ»; sandy@ieee.org

Ключевые слова: *слепая оценка, оценка частоты, оценка фазы, совместная оценка частоты и фазы, квадратурная амплитудная модуляция.*

Введение. Системы частотной и фазовой синхронизации – неотъемлемая часть систем, выполняющих когерентную обработку сигналов с цифровой линейной модуляцией. При этом в ряде случаев из-за отсутствия в сигнале служебных фрагментов, известных на приемной стороне, используется метод слепой оценки.

Алгоритмы частотной и фазовой синхронизации можно разделить на два класса: разомкнутые, производящие оценку частоты и фазы по наблюдаемой выборке сигнала, и замкнутые, которые представляют собой следящие системы с обратной связью. Для быстрой первоначальной оценки параметров, как правило, применяются разомкнутые методы. Максимальное приближение к теоретически возможным пределам позволяет повысить точность оценки либо сократить длительность сигнала, необходимую для достижения заданной точности.

В работах [1–3] рассматривается семейство разомкнутых алгоритмов слепой оценки частотного и фазового сдвига сигналов с цифровой линейной модуляцией, многие из которых основаны на нахождении положения и фазы максимума в спектре нелинейно преобразованного сигнала.

В [4] авторами данной статьи предложена идея разложения функции правдоподобия (ФП) в ряд по угловым гармоникам для слепой оценки фазы. Впоследствии этот подход был применен для оценки частоты с использованием гармонической аппроксимации ФП [5]. Настоящая статья основана на материалах докладов [6, 7], посвященных совместной оценке частотного и фазового сдвига с использованием данного метода.

Постановка задачи и решение по максимуму правдоподобия. Рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом. Наблюдаемая выборка $\{\dot{x}(k)\}$ представляет собой отсчеты комплексной огибающей сигнала после согласованного фильтра (в соответствии с [8] мы предполагаем, что частотный сдвиг много меньше символьной скорости):

$$\dot{x}(k) = \dot{a}(k)\exp\left(j(\varphi_0 + k\varphi_f)\right) + \dot{n}(k);\ k = 0,\ \ldots,\ K-1,$$

где $\dot{a}(k)$ – информационные символы, независимо и равновероятно выбираемые из сигнального созвездия $\{\dot{C}_m\}$; m=1, ..., M (M – размер созвездия); φ_0 – фазовый сдвиг; $\varphi_f = 2\pi\Delta fT$ – межсимвольный фазовый набег из-за частотного сдвига Δf; T – длительность символа; $\dot{n}(k)$ – отсчеты комплексного дискретного белого гауссового шума, вещественная и мнимая составляющие которого имеют дисперсию, равную σ^2. Отношение сигнал/шум определим как отношение дисперсии сигнала к дисперсии шума:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\overline{\left|\dot{a}(k)\right|^2}}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2 M}\sum_{m=1}^{M}\left|\dot{C}_m\right|^2.$$

Задачей является получение совместной оценки фазового (φ_0) и частотного (Δf) сдвига или, что эквивалентно, – межсимвольного фазового сдвига φ_f.

Правило максимума правдоподобия (МП) для оценки φ_0 и Δf формулируется так. ФП для неизвестного фазового сдвига φ при условии, что был принят отсчет $\dot{x}$, получается при усреднении (по сигнальному созвездию $\{\dot{C}_m\}$) плотности вероятности комплексной гауссовой случайной величины с математическим ожиданием в точке созвездия $\dot{C}_m$ в сочетании с поворотом отсчета по фазе на $-\varphi$:

$$\mathrm{LF}(\varphi,\dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 M}\sum_{m=1}^{M}\exp\left(-\frac{\left|\dot{x}e^{-j\varphi} - \dot{C}_m\right|^2}{2\sigma^2}\right) = w(\dot{x}e^{-j\varphi}). \qquad (1)$$

Для расчетов удобнее использовать логарифм функции правдоподобия (ЛФП):

$$\mathrm{LLF}(\varphi,\dot{x}) = \log\left(w\left(\dot{x}e^{-j\varphi}\right)\right).$$

Отсчеты $\{\dot{x}(k)\}$ являются статистически независимыми вследствие того, что шум $\{\dot{n}(k)\}$ белый и информационные символы $\dot{a}(k)$ независимы. Поэтому ЛФП для φ_f и φ_0, если была принята последовательность $\{\dot{x}(k)\}$, записывается в виде

$$\mathrm{LLF}\left(\varphi_0,\varphi_f,\{\dot{x}(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{K-1}\log\left(w\left(\dot{x}(k)e^{-j(\varphi_0+k\varphi_f)}\right)\right). \qquad (2)$$

Наконец, максимизация (2) по φ_0 и φ_f дает МП оценку частотного и фазового сдвига:

$$\left\{\widehat{\varphi_0},\widehat{\varphi_f}\right\} = \underset{\{\varphi_0,\varphi_f\}}{\arg\max}\,\mathrm{LLF}\left(\varphi_0,\varphi_f,\{\dot{x}(k)\}\right);\quad \widehat{\Delta f} = \frac{1}{2\pi T}\widehat{\varphi_f}. \qquad (3)$$

Разложение ЛФП в ряд по угловым гармоникам. Получение МП оценки частотного и фазового сдвига непосредственно по формулам (1)–(3) требует значительных вычислительных затрат. Представим ЛФП в виде ряда и упростим его вычисление. Переведем отсчеты $\dot{x}$ в полярные координаты, выделив в них модуль и фазу:

$$\mathrm{LLF}(\varphi,\dot{x}) = \mathrm{LLF}\left(\phi, re^{j\phi}\right), \qquad (4)$$

где $r = \left|\dot{x}\right|$ и $\phi = \arg\dot{x}$.

Зависимость ЛФП (4) от фазы ϕ, очевидно, является периодической функцией с периодом, в общем случае равным 2π. Однако используемые на практике сигнальные созвездия обладают угловой симметрией, поэтому для них период будет меньше (для M-позиционной ФМ он составит $2\pi/M$, а для КАМ с квадратным или крестообразным созвездием будет равен $\pi/2$). Таким образом, ЛФП можно представить в виде ряда Фурье относительно фазы ϕ, что приводит к разложению по угловым гармоникам [9]:

$$\mathrm{LLF}\left(\varphi, re^{j\phi}\right) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}A_n(r)\cos\left(n\phi - n\varphi + \theta_n(r)\right),$$

где $A_n(r)$ и $\theta_n(r)$ – зависящие от модуля отсчета сигнала r амплитуда и фаза n-й гармоники ряда Фурье:

$$A_n(r)e^{j\theta_n(r)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{LLF}\left(0, re^{j\phi}\right)e^{-jn\phi}d\phi. \quad (5)$$

Необходимо отметить, что при определенном угловом положении используемых на практике сигнальных созвездий все комплексные коэффициенты (5) ряда Фурье оказываются вещественными, так что $\theta_n(r) = 0$ или π. Кроме того, из-за упомянутой выше угловой симметрии сигналов с КАМ отличны от нуля только коэффициенты с номерами, кратными 4. В дальнейшем (для удобства) будем полагать, что $\theta_n(r) = 0$, поэтому $A_n(r)$ могут принимать отрицательные значения.

Таким образом, ЛФП (2) для всей выборки $\{\dot{x}(k)\}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathrm{LLF}\left(\varphi_0, \varphi_f, \{\dot{x}(k)\}\right) &= \\ = \sum_{k=0}^{K-1}\frac{A_0\left(r(k)\right)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{K-1}\mathrm{Re}\left(A_n\left(r(k)\right)e^{j\left(n\phi(k)-n\varphi_0-nk\varphi_f\right)}\right) &= \\ = \frac{f_0\left(\{\dot{x}(k)\}\right)}{2} + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{f}_n\left(\left\{\dot{x}(k)e^{-j\left(\varphi_0+k\varphi_f\right)}\right\}\right),\end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\dot{f}_n\left(\{\dot{x}(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{K-1}A_n\left(r(k)\right)\exp\left(jn\phi(k)\right).$$

Важно отметить, что комплексная функция $\dot{f}_n$ обладает следующим свойством:

$$\dot{f}_n\left(\{\dot{x}(k)e^{j\varphi}\}\right) = e^{jn\varphi}\dot{f}_n\left(\{\dot{x}(k)\}\right),$$

поэтому (6) может быть переписана в виде

$$\mathrm{LLF}\left(\varphi_0, \varphi_f, \{\dot{x}(k)\}\right) = \frac{f_0\left(\{\dot{x}(k)\}\right)}{2} + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-jn\varphi_0}\dot{F}_n(n\varphi_f), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\dot{F}_n(\nu) &= \sum_{k=0}^{K-1}A_n\left(r(k)\right)\exp\left(jn\phi(k)\right)\exp\left(-jk\nu\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{K-1}\dot{u}_n\left(\dot{x}(k)\right)\exp\left(-jk\nu\right)\end{aligned} \quad (8)$$

есть спектр нелинейно преобразованной последовательности отсчетов сигнала:

$$\dot{u}_n(\dot{x}) = \dot{u}_n(re^{j\phi}) = A_n(r)\exp\left(jn\phi\right).$$

Это нелинейное преобразование заключается в умножении фазы отсчета сигнала на номер гармоники n и применении соответствующей весовой функции $A_n(r)$ к модулю отсчета сигнала.

Для получения совместной МП оценки частотного и фазового сдвига необходимо максимизировать (7) по φ_f и φ_0.

Предлагаемые алгоритмы. Следует отметить, что с увеличением номера n амплитуды угловых гармоник в (5) уменьшаются, поэтому можно воспользоваться аппроксимацией ЛФП, заключающейся в усечении ряда (7). Более того, слагаемое с номером $n = 0$ является константой и не влияет на итоговую оценку. Тогда, оставляя в (7) только первую ненулевую гармонику (с $n = 4$), придем к формулам

$$\widehat{\varphi_f} = \frac{1}{4}\arg\max_{\nu}\left|\dot{F}_4(\nu)\right|; \quad \widehat{\Delta f} = \frac{1}{2\pi T}\widehat{\varphi_f}; \quad (9)$$

$$\widehat{\varphi_0} = \frac{1}{4}\arg\dot{F}_4\left(4\widehat{\varphi_f}\right). \quad (10)$$

Рассчитать спектр $\dot{F}_4(\nu)$ можно с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) с дополнением сигнала нулями для повышения точности определения положения максимума. Из (8)–(10) видно, что получена версия алгоритма возведения сигнала в 4-ю степень [1–3] с весовой функцией $A_4(r)$, зависящей от амплитуды сигнала.

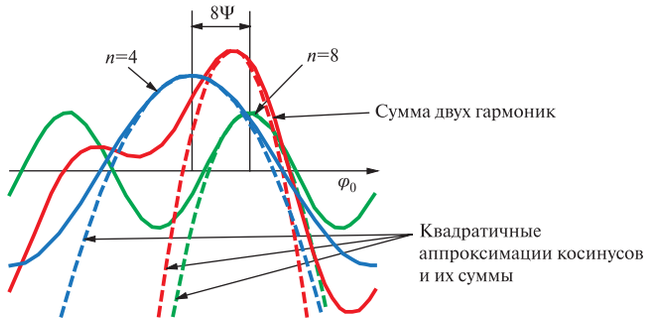

Рис. 1

Численные оценки показывают, что уровни первой и второй гармонических составляющих (с $n = 4$ и $n = 8$) сопоставимы, а следовательно, их совместное использование может улучшить качество оценки. Если в (7) оставить две гармоники ЛФП, аппроксимация будет выглядеть как

$$\begin{aligned}\mathrm{LLF}\left(\varphi_0, \varphi_f, \{\dot{x}(k)\}\right) &\approx \mathrm{Re}\left(e^{-j4\varphi_0}\dot{F}_4(4\varphi_f) + e^{-j8\varphi_0}\dot{F}_8(8\varphi_f)\right) = \\ &= \left|\dot{F}_4(4\varphi_f)\right|\cos\left(\arg\left(\dot{F}_4(4\varphi_f)\right) - 4\varphi_0\right) + \\ &= \left|\dot{F}_8(8\varphi_f)\right|\cos\left(\arg\left(\dot{F}_8(8\varphi_f)\right) - 8\varphi_0\right).\end{aligned} \quad (11)$$

Строгое решение для максимизации этой функции по φ_0 требует поиска корней полинома 4-й степени, поэтому для практического применения данного подхода требуется аппроксимация, которую можно получить, заменив функции косинуса в окрестностях их максимумов на квадратичные полиномы (рис. 1).

Для краткости обозначим $\dot{F}_4\left(4\varphi_f\right) = \dot{F}_4$, $\dot{F}_8\left(8\varphi_f\right) = \dot{F}_8$. Продифференцировав выражение (11) по параметру φ_0 и приравняв результат нулю, получим

$$\left|\dot{F}_4\right|\sin\left(\arg\dot{F}_4 - 4\varphi_0\right) + 2\left|\dot{F}_8\right|\sin\left(\arg\dot{F}_8 - 8\varphi_0\right) = 0.$$

Далее, используя представление функции синуса в виде ряда Тейлора и оставляя только линейные слагаемые (предполагается, что аргумент синуса $\left(\arg\dot{F}_4 - 4\varphi_0\right)$ мал, что имеет место при больших значениях отношения сигнал/шум, когда оценка (10) приближается к истинному значению), запишем

$$\left|\dot{F}_4\right|\left(\arg\dot{F}_4 - 4\varphi_0\right) + 2\left|\dot{F}_8\right|\left(\arg\dot{F}_8 - 8\varphi_0\right) = 0.$$

Выполнив несложные математические преобразования, получим примерное значение φ_0, при котором выражение (11) достигает максимума:

$$\widehat{\varphi_0} \approx \frac{\left|\dot{F}_4\right|\arg\dot{F}_4 + 2\left|\dot{F}_8\right|\arg\dot{F}_8}{4\left|\dot{F}_4\right| + 16\left|\dot{F}_8\right|},$$

или (что то же самое):

$$\widehat{\varphi_0} \approx \frac{1}{4}\left(\arg\left(\dot{F}_4\left(4\varphi_f\right)\right) + \frac{2\psi\left(4\varphi_f\right)\left|\dot{F}_8\left(8\varphi_f\right)\right|}{\left|\dot{F}_4\left(4\varphi_f\right)\right| + 4\left|\dot{F}_8\left(8\varphi_f\right)\right|}\right), \quad (12)$$

где

$$\psi(\nu) = \arg\frac{\dot{F}_8(2\nu)}{\dot{F}_4^2(\nu)}.$$

Заменив в (11) функцию косинуса на квадратичный полином ($\cos x \approx 1 - x^2/2$ для малого аргумента) и подставив туда значение (12), получим функцию частоты:

$$F(\nu) = \left|\dot{F}_4(\nu)\right| + \left|\dot{F}_8(2\nu)\right| - \frac{\psi^2(\nu)\left|\dot{F}_4(\nu)\dot{F}_8(2\nu)\right|}{2\left|\dot{F}_4(\nu)\right| + 8\left|\dot{F}_8(2\nu)\right|}; \quad \nu = 4\varphi_f. \quad (13)$$

Тогда оценка частотного сдвига будет выглядеть следующим образом:

$$\widehat{\varphi_f} = \frac{1}{4}\arg\max_{\nu} F(\nu);\ \ \widehat{\Delta f} = \frac{1}{2\pi T}\widehat{\varphi_f}. \qquad (14)$$

Этот алгоритм требует поиска максимума нелинейной комбинации спектров $\dot{F}_4(\nu)$ и $\dot{F}_8(2\nu)$. Такой поиск, как и в случае с одним слагаемым (9), может быть эффективно реализован с использованием БПФ с дополнением нулями.

Определив $\widehat{\varphi_f}$ и подставив найденное значение в (12), получим оценку $\widehat{\varphi_0}$.

Приведем несколько замечаний о реализации предлагаемых алгоритмов. Во-первых, для получения точной оценки частоты и фазы рекомендуется использовать уточнение положения максимума функций в выражениях (9) и (14), например путем параболической интерполяции.

Во-вторых, «идеальная» реализация предлагаемых алгоритмов предполагает вычисление весовых функций $A_n(r)$, зависящих от отношения сигнал/шум, что может оказаться неприемлемым для решения практических задач. Более практичен вариант, использующий фиксированные весовые функции, вычисленные для конкретного отношения сигнал/шум.

В-третьих, при «идеальной» реализации алгоритмов уровни сигнала и шума априори известны. Вариант алгоритма, когда уровни сигнала и шума неизвестны, рассмотрен в [6], где предлагается оценивать мощность сигнала по наблюдаемой выборке, полагая фиксированное отношение сигнал/шум на входе (в принятом сигнале). Как показывает моделирование, это приводит лишь к незначительным потерям (около 1 дБ) в области умеренных отношений сигнал/шум при длинах выборки больше утроенного-учетверенного размера созвездия.

Результаты моделирования. Для оценки точностных характеристик предложенных алгоритмов было выполнено компьютерное моделирование. Использовались стандартные созвездия: квадратное КАМ-16 и крестообразное КАМ-32, длина генерируемой выборки K составляла 100 символов, для измерения дисперсии оценки использовалось усреднение по 10 тыс. реализаций. Случайный фазовый сдвиг φ_0 и случайный частотный сдвиг Δf были равномерно распределены на интервалах $0...\pi/2$ и $-1/(8T)...1/(8T)$ соответственно (эти диапазоны следуют из фазовой неопределенности, неизбежной для слепых алгоритмов оценки частоты и фазы [8]). Полученные зависимости дисперсии оценки частотного и фазового сдвига от отношения сигнал/шум представлены на рис. 2, 4 и рис. 3, 5 соответственно.

Кривым на графиках соответствуют следующие алгоритмы:

4th power – алгоритм возведения сигнала в 4-ю степень [1];

WA03 – алгоритм с кусочно-линейной аппроксимацией весовых функций [3];

CHE4 – алгоритмы (9) и (10), «идеальная» реализация;

CHE48 – алгоритмы (12)–(14), «идеальная» реализация;

CHE4, fixed, CHE48, fixed – версии CHE4 и CHE48 с использованием фиксированных весовых функций (рис. 6 и 7);

CRLB – нижняя граница Крамера–Рао для совместной оценки частотного и фазового сдвига [10].

Из приведенных графиков видно, что при столь короткой выборке алгоритм 4th power плохо работает для созвездия КАМ-16 и оказывается неработоспособным для созвездия КАМ-32 – его характеристики ограничены собственным шумом.

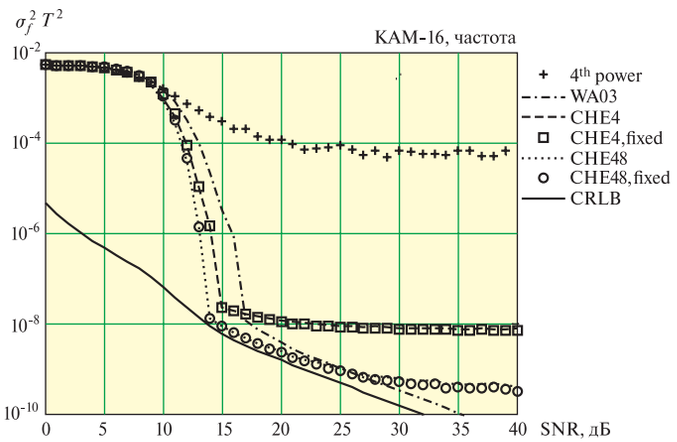

Рис. 2

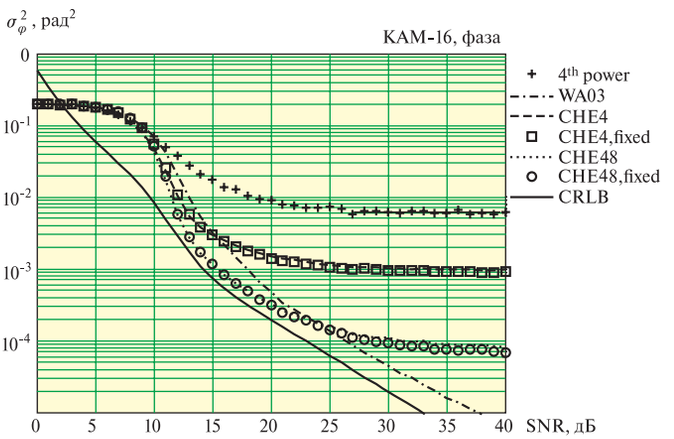

Рис. 3

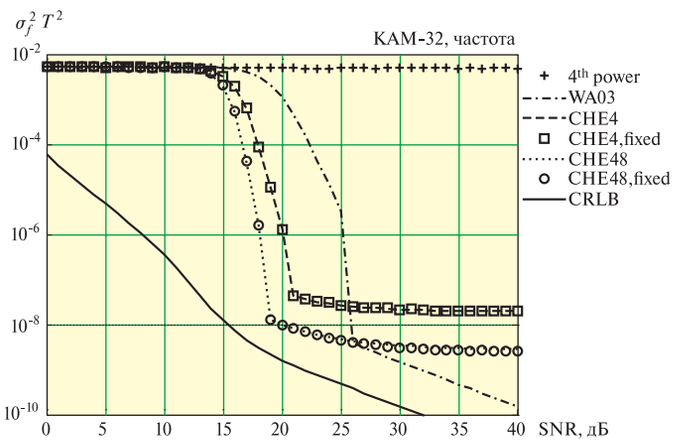

Рис. 4

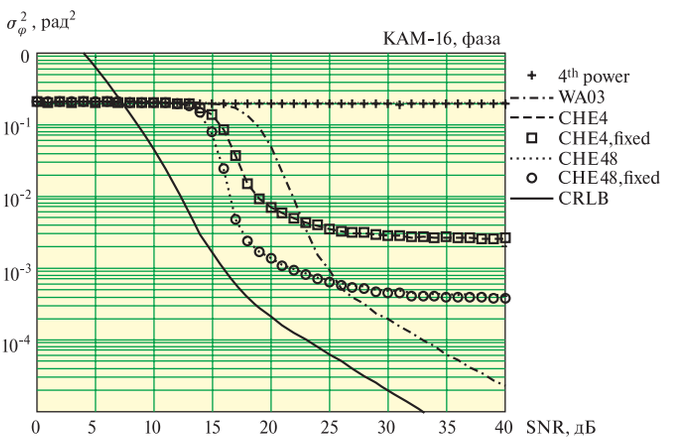

Рис. 5

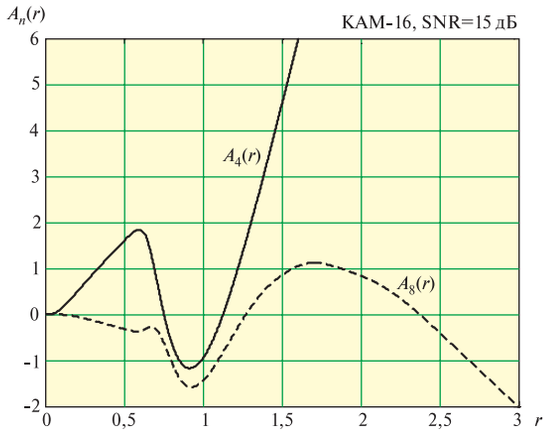

Рис. 6

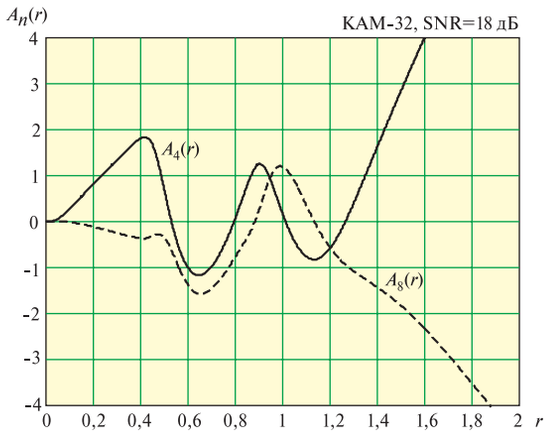

Рис. 7

Предложенные методы превосходят алгоритм WA03 в области умеренных отношений сигнал/шум, представляющей наибольший практический интерес. При этом для квадратного созвездия КАМ-16 выигрыш меньше, чем для крестообразного созвездия КАМ-32. Резкий переход к малым значениям дисперсии оценки на графиках для частоты соответствует исчезновению аномальных ошибок. Для созвездия КАМ-16 этот переход наступает при отношении сигнал/шум на 2–3 дБ меньше, а для созвездия КАМ-32 на 4–6 дБ меньше, чем для алгоритма WA03. Выигрыш достигается благодаря знакопеременному характеру весовых функций и использованию двух угловых гармоник.

Применение фиксированных весовых функций приводит к незначительным (по сравнению с «идеальной» реализацией данного подхода) потерям при низких значениях отношения сигнал/шум. Это объясняется тем, что при высоких значениях отношения сигнал/шум меняются лишь амплитуды весовых функций, а их форма остается практически неизменной.

При уменьшении длины выборки увеличивается собственный шум, а аномальные ошибки исчезают при более высоких значениях отношения сигнал/шум. Для КАМ-сигналов характеристики алгоритма, использующего две гармоники, начинают резко ухудшаться при длинах выборки меньше удвоенного размера созвездия.

На рис. 3 и 5 видно, что при низком значении отношения сигнал/шум дисперсия оценки фазы становится меньше границы Крамера–Рао. Это объясняется периодическим характером оцениваемого параметра (начальной фазы) [11]. Верхний предел дисперсии оценки фазы в данном случае равен дисперсии равномерного распределения для упоминавшегося ранее диапазона $0...\pi/2$: $(\pi/2)^2/12 = \pi^2/48 \approx 0{,}21$ рад^2.

Заключение. Предложенный метод совместной слепой оценки частотного и фазового сдвига превосходит известные алгоритмы в области умеренных отношений сигнал/шум, представляющей наибольший практический интерес, и показывает хорошие результаты даже в случае отсутствия информации о мощности сигнала и отношении сигнал/шум [6]. Алгоритм основывается на удобном в вычислительном отношении механизме аппроксимации ЛФП для сигналов с линейной модуляцией одной или двумя угловыми гармониками. Область использования таких аппроксимаций не ограничивается рассмотренной задачей слепой оценки частотного и фазового сдвига сигнала. Этот подход может применяться и для решения целого ряда других задач, связанных со слепыми оценками.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ciblat P., Ghogho M.** Blind NLLS Carrier Frequency-Offset Estimation for QAM, PSK, and PAM Modulations: Performance at Low SNR // IEEE Trans. Communications. – 2006. – Vol. 54, № 10. – P. 1725–1730.
2. **Wang Y., Serpedin E., Ciblat P.** Optimal Blind Feedforward Carrier Synchronization for General QAM Modulations // Conf. Record of the Thirty-Sixth Asilomar Conf. (3–6 Nov. 2002). – Vol. 1. – P. 644–648.
3. **Wang Y., Serpedin E., Ciblat P.** Optimal Blind Nonlinear Least-Squares Carrier Phase and Frequency Offset Estimation for General QAM Modulations // IEEE Trans. Wireless Communications. – 2003. – Vol. 2, № 5. – P. 1040–1054.
4. **Петров А.В., Сергиенко А.Б.** Новый алгоритм слепой оценки фазового сдвига для КАМ-сигналов на основе аппроксимации функции правдоподобия // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 28–32.
5. **Sergienko A.B., Petrov A.V.** Blind Carrier Frequency Offset Estimation for QAM Signals Based on Weighted 4th Power of Signal Samples // Proc. 8th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2010, St. Petersburg, September 17–20, 2010). – St. Petersburg, 2010. – P. 278–281.
6. **Петров А.В., Сергиенко А.Б.** Совместная слепая оценка частоты и фазы КАМ-сигналов без информации о мощности сигнала и отношении сигнал/шум // Доклады 13-й международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение» (DSPA-2011, Москва, 30 марта – 1 апреля 2011 г.). – Москва, 2011. – С. 242–246.
7. **Sergienko A.B., Petrov A.V.** Joint Blind Estimation of Carrier Phase and Frequency Offset for QAM Signals Using Circular Harmonic Decomposition // Proc. 36th IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP 2011, Prague, May 22–27, 2011). – Prague, 2011. – P. 3460–3463.
8. **Mengali U., D'Andrea A.N.** Synchronization Techniques for Digital Receivers. – Plenum Press, New York, 1997.
9. **Jacovitti G., Neri A.** Multiresolution Circular Harmonic Decomposition // IEEE Trans. Signal Processing. – 2000. – Vol. 48, № 11. – P. 3242–3247.
10. **Rice F., Cowley B., Moran B., Rice M.** Cramer-Rao Lower Bounds for QAM Phase and Frequency Estimation // IEEE Trans. Communications. – 2001. – Vol. 49, № 9. – P. 1582–1591.
11. **Routtenberg T., Tabrikian J.** Periodic CRB for Non-Bayesian Parameter Estimation // Proc. 36th IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP 2011, Prague, May 22–27, 2011). – Prague, 2011. – P. 2448–2451.

Получено 09.09.11