УДК 621.391.96

КЛАСС ТУРБО-КОДОВ С ПОНИЖЕННОЙ СЛОЖНОСТЬЮ АЛГОРИТМОВ ДЕКОДИРОВАНИЯ

Л. Е. Назаров, ведущий научный сотрудник ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, д.ф-м.н.
И. В. Головкин, аспирант ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН; golovkin-iv@yandex.ru

Ключевые слова: *турбо-коды, итеративное декодирование, быстрое преобразование Уолша-Адамара.*

Введение. Турбо-коды представляют альтернативу известным помехоустойчивым кодам относительно их вероятностных характеристик. Классические турбо-коды формируются путем параллельного объединения двух сверточных кодов с числом состояний кодовой решетки 16 и более [1]. Детальное описание принципа турбокодирования приведено в [2]. При увеличении информационных блоков турбокодов до несколько тысяч битов достигаются вероятностные характеристики декодирования, близкие к характеристикам Шенноновской пропускной способности каналов с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) для вероятностей ошибок на бит $P_б = 10^{-5} - 10^{-8}$.

Открытие турбо-кодов стимулировало поиск подобных схем кодирования, более простых по отношению к алгоритмам декодирования. К настоящему времени известен ряд конструкций, эквивалентных турбо-кодам с последовательным объединением коротких блоковых кодов, и простейший рекурсивный сверточный код с минимально возможным числом состояний кодовой решетки, равным 2 [3,4,5]. При декодировании данных схем кодирования используется итеративная процедура, сложность которой определяется сложностью алгоритмов декодирования составляющих кодов [2]. Это обусловливает актуальность проблемы разработки данных алгоритмов декодирования.

Цель данной работы — привести описание и результаты исследований алгоритма итеративного декодирования для эффективной кодовой конструкции, входящей в класс рассматриваемых турбо-кодов.

Постановка задачи. Кодер рассматриваемого турбокода на основе объединения кодов C_1 и C_2 подобен кодеру каскадного кода. Блок-схема турбо-кода с последовательным объединением блоковых кодов и простейшего рекурсивного сверточного кода приведена на рис. 1 (T — элемент задержки на такт).

В качестве внешнего кода C_1 используются l кодеров систематического блокового кода (n, k) с порождающей матрицей $G = (g_{il}; 0 \le i < k, 0 \le l < n)$. Здесь n — длительность кодовых слов, k — объем информационного блока. В качестве внутреннего кода C_2 применяется простейший рекурсивный сверточный код с кодовой скоростью 1 и длиной кодового ограничения 1 (число состояний кодовой решетки равно 2).

Длительность формируемых кодовых слов равна $L = ln$, информационный объем $K = lk$, кодовая скорость $R = k/n$.

Последовательность информационных символов $\vec{a}$ длительностью K разбивается на l групп $\vec{a}_1,...,\vec{a}_l$ длительностью

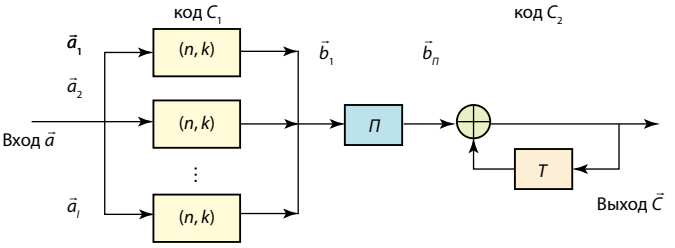

Рис. 1

k, которые поступают на вход кодеров кода C_1. Кодовые символы с выходов кодеров кода C_1 следуют на устройство перемежения *П* и далее на вход кодера внутреннего кода C_2.

Закон перемежения определяет метрические и вероятностные характеристики рассматриваемой кодовой конструкции. Проблема выбора оптимальных перемежителей с учетом возможности их исполнения средствами параллельного программирования рассматривалась в [5, 6].

Последовательность символов кодовых слов $\vec{c}$ поступает на вход модулятора канальных сигналов с двоичной фазовой модуляцией. На вход декодера поступает реализация $\vec{Y} = (y_l; 0 \le l < n)$. Здесь

$$y_i = \sqrt{\frac{2kE_б}{nN_0}}(1-2c_i)+n_i,$$

где n_i — нормализованные помеховые составляющие, соответствующие АБГШ с односторонней спектральной плотностью N_0; $E_б$ — энергия сигналов на информационный бит.

Разработка процедуры обработки реализации $\vec{Y}$ при декодировании рассматриваемых турбо-кодов составляет суть задачи.

Алгоритм декодирования турбо-кодов. На рис. 2 приведена блок-схема алгоритма декодирования турбо-кода с последовательным объединением блоковых кодов и простейшего рекурсивного сверточного кода [5, 6]. Итерация включает два этапа.

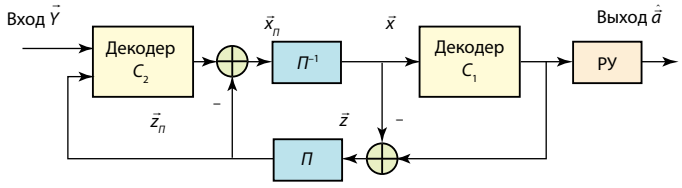

Рис. 2

На первом этапе j-й итерации в блоке *Декодер* C_2 вычисляется функционал

$$x_{Пi}^{(j)} = \ln\left(\frac{\Pr(c_i=0|\vec{Y},\vec{z}_П^{(j)})}{\Pr(c_i=1|\vec{Y},\vec{z}_П^{(j)})}\right) - z_{Пi}^{(j)}.$$

Здесь $\Pr(c_i|\vec{Y},\vec{z}_П^{(j)})$ — апостериорные вероятности символов кода C_2; $\vec{z}_П^{(j)}$ — вектор априорной информации символов кода C_2, на первой итерации его отсчеты полагаются равными 0.

При вычислении апостериорных вероятностей используется известный алгоритм MAP, либо BP (belief propagation) [1, 2, 3]. Эти алгоритмы основаны на представлении кодовых слов сверточного кода в виде решетчатой структуры.

При реализации алгоритмов MAP и BP требуется оценка параметра $E_б/N_0$, а также вычисление нелинейных функций $\exp(x)$ и $\ln(x)$. Модификации данных алгоритмов, известные в литературе как log_max_map и min_sum, существенно проще по реализации, поскольку не требуют оценки данного параметра и используют лишь линейные операции «сложение—вычитание—сравнение». Детальное описание алгоритмов MAP, BP и их модификаций для используемого сверточного кода C_2 приведены в [2,7].

На втором этапе j-й итерации в блоке *Декодер* C_1 на основе деперемеженных отсчетов последовательности $\vec{x}^{(j)}$ вычисляется функционал

$$z_i^{(j)} = L(b_i|\vec{x}^{(j)}) - x_i^{(j)},$$

где $L(b_i|\vec{x}^{(j)}) = \ln\left(\frac{\Pr(b_i=0|\vec{x}^{(j)})}{\Pr(b_i=1|\vec{x}^{(j)})}\right)$.

Последовательность $\vec{z}^{(j)}$ после деперемежения принимается в качестве априорной информации $\vec{z}_П^{(j+1)}$ для последующей $(j+1)$-й итерации.

После реализации требуемого числа итераций принимаются оценки решающим устройством (РУ) относительно информационных символов $\hat{a}_i$: если $L(a_i|\vec{x}^{(j)}) > 0$, то $\hat{a}_i = 0$ и $\hat{a}_i = 1$ — в противном случае.

Приведем описание разработанной процедуры для вычисления $L(b_i|\vec{x}^{(j)})$. Ее основу составляет производительный алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша-Адамара (БПУ) [8]. На данном этапе отсчеты последовательности $\vec{x}^{(j)}$ рассматриваются как «мягкие» решения для символов кода C_1. Для $L(b_i|\vec{x}^{(j)})$ верно выражение:

$$L(b_i|\vec{x}^{(j)}) = \ln\left(\frac{\sum\limits_{\vec{B}_m:b_{mi}=0}\exp\left(\sum\limits_{u=0}^{n-1}x_u^{(j)}(1-2b_{mu})\right)}{\sum\limits_{\vec{B}_m:b_{mi}=1}\exp\left(\sum\limits_{u=0}^{n-1}x_u^{(j)}(1-2b_{mu})\right)}\right). \quad (1)$$

При вычислении внутренних сумм выражения (1) можно применить алгоритм БПУ размерностью 2^k над анализируемой функцией $V(\nu)$: $V(\nu) = x_i^{(j)}$ для $\nu = \sum\limits_{t=0}^{k-1} g_{it}2^t$ и $V(\nu) = 0$ — в противном случае, $\nu = 0, 1,.., 2^k - 1$ [9].

Алгоритм БПУ основан на представлении матрицы Уолша-Адамара размерностью 2^k в виде произведения k матриц размерностью 2^k, имеющих лишь 2^{k+1} ненулевых компонент. Граф БПУ имеет k слоев, каждый из которых содержит 2^{k-1} элементов — «бабочек» с базовыми операциями «сложение — вычитание» [8].

При вычислении (1) необходимо определить нелинейные функции $\ln(x)$, $\exp(x)$. Это усложняет реализацию соответствующей процедуры. Применение более простого метода не требует вычисления нелинейных функций. Его суть заключается в использовании приближения к исходному выражению (1):

$$L(b_i|\vec{x}^{(j)}) \cong \max_{\vec{B}_m:b_{mi}=0}\left(\sum_{u=0}^{n-1}x_u^{(j)}(1-2b_{mu})\right) - \max_{\vec{B}_m:b_{mi}=1}\left(\sum_{u=0}^{n-1}x_u^{(j)}(1-2b_{mu})\right). \quad (2)$$

При вычислении (2) можно применить модифицированный алгоритм БПУ размерностью 2^k с базовой операцией «сравнение». На рис. 3 приведена схема элемента — парные «бабочки» ***i***-го слоя этого алгоритма с базовыми операциями «сравнение — пересылки». Выходные парные отсчеты

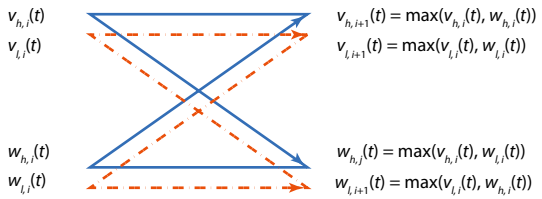

Рис. 3

$v_{h,\,i+1}(t)$, $v_{l,\,i+1}(t)$ и $w_{h,\,i+1}(t)$ $w_{l,\,i+1}(t)$, являющиеся входными для (i+1)-го слоя, формируются по правилу:

$$v_{h,i+1}(t) = \max(v_{h,i}(t), w_{h,i}(t));$$

$$v_{l,i+1}(t) = \max(v_{l,i}(t), w_{l,i}(t));$$

$$v_{h,i+1}(t) = \max(v_{h,i}(t), w_{l,i}(t));$$

$$w_{l,i+1}(t) = \max(v_{l,i}(t), w_{h,i}(t)).$$

Здесь $v_{h,\,i}(t)$, $v_{l,\,i}(t)$ и $w_{h,\,i}(t)$, $w_{l,\,i}$ (t) парные отсчеты на входе i-го слоя, $t = 0, 1,.., 2^{k-1}$. На первом слое парные отсчеты задаются в следующем виде: $v_{l,0}(t) = w_{l,0}(t) = 0$; $v_{h,0}(t) = w_{h,0}(t) = x_u$, если $t = \sum_{p=0}^{k-1} g_{i,u} 2^p$ и $v_{h,0}(t) = w_{h,0}(t) = 0$ — в противном случае. На последнем k-м слое определяются значения $L(b_i | \vec{x}^{(j)})$, задаваемые (2).

Результаты моделирования. На рис. 4 кривая *1* соответствует зависимости вероятности ошибки на бит $P_б$ от отношения сигнал/помеха $\frac{E_б}{N_0}$. Она получена путем моделирования приведенной процедуры итеративного декодирования для турбо-кода из рассматриваемого класса с кодовой скоростью 1/2 и объемом информационного блока 4000 битов (20 итераций). В качестве внешнего кода C_1 используется совокупность 1000 блоковых биортогональных кодов (8,4). Видно, что вероятность ошибки $P_б = 10^{-5}$ достигается при $\frac{E_б}{N_0} = 1{,}5$ дБ.

Кривая *2* соответствует подобной зависимости для данного турбо-кода с объемом информационного блока 10000 битов (20 итераций). В качестве внешнего кода C_1 применяется совокупность 2500 блоковых биортогональных кодов (8,4). Видно, что при увеличении объема информационного блока вероятностные характеристики турбо-кода улучшаются, вероятность ошибки $P_б = 10^{-5}$ в этом случае достигается при $\frac{E_б}{N_0} = 1{,}3$ дБ (отличается лишь на 1,1 дБ

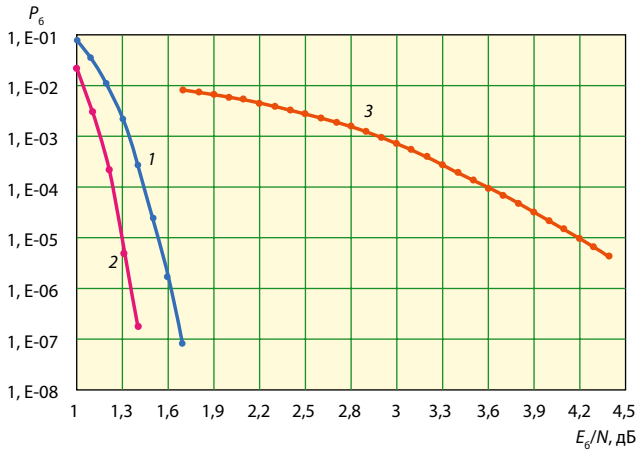

Рис. 4

от предела Шеннона для дискретно-непрерывного канала с АБГШ) и использовании ансамбля сигналов с двоичной фазовой манипуляцией с кодовой скоростью 1/2 [10]

Кривая *3* соответствует подобной зависимости для сверточного кода с той же кодовой скоростью 1/2 и длиной кодового ограничения 7 в совокупности с алгоритмом декодирования Витерби. В этом случае вероятность ошибки $P_б = 10^{-5}$ достигается при $\frac{E_б}{N_0} = 4{,}2$ дБ и энергетический выигрыш при применении рассматриваемого турбо-кода с информационным объемом 10000 битов по отношению к данному сверточному коду для вероятности ошибки $P_б = 10^{-5}$ достигает 2,9 дБ. При дальнейшем уменьшении ошибки $P_б$ значение энергетического выигрыша увеличивается.

Заключение. Представленный алгоритм итеративного декодирования предназначен для эффективной кодовой конструкции, эквивалентной турбо-коду с последовательным объединением множества коротких блоковых кодов и простейшего рекурсивного сверточного кода с минимально возможным числом состояний кодовой решетки, равным 2. Алгоритм двухэтапен, его основу составляет алгоритм MAP и алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша-Адамара.

Рассмотренный алгоритм характеризуется пониженной сложностью реализации по отношению к соответствующему алгоритму декодирования классических турбо-кодов на основе параллельного объединения сверточных кодов с числом состояний 16. При этом по вероятностным характеристикам рассматриваемые турбо-коды практически эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hagenauer J., Offer E., Papke L.** Iterative decoding of binary block and convolutional codes.//IEEE Transactions on Information Theory.— 1996.— Vol.42, № 2.— P.429—448.
2. **Шлома А.М., Бакулин Н.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П.** Новые алгоритмы формирования и обработки сигналов в системах подвижной связи.— М.: Горячая линия — Телеком. 2008.
3. **Jing Li., Narayanan K.R., Georghiades.N.** Product accumulate codes: a class of codes with near-capacity performance and low decoding complexity//IEEE Transactions on Information Theory.— 2004.— Vol.50, № 1.— P.31—46.
4. **Park S.I., Yang K.** Extended Hamming accumulate codes and modified irregular repeat accumulate codes//Electronics Letters. — 2002.— Vol. 38, № 10.— P. 467—468.
5. **Назаров Л.Е., Головкин И.В.** Характеристики турбо-кодов с пониженной сложностью алгоритмов приема//Труды 10-й Международной конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение» (Москва, 26—28 марта, 2008). — Москва, 2008.— С. 31.
6. **Giulietti A., Perre L., Strum M.** Parallel turbo coding interleavers: avoiding collisions in accesses to storage elements//Electronics Letters.— 2002.— Vol. 38, № 5.— P. 232—234.
7. **Хошев А.Ю., Шлома А.М.** Алгоритм посимвольного декодирования параллельного каскадного кода во временной области//Цифровая обработка сигналов.— 2001.— № 2.— С. 15—18.
8. **Трахтман А.М., Трахтман В.А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.— М.: Мир, 1976.— 208 с.
9. **Смольянинов В.М.** Дискретные мультипликативные групповые сигналы и их связь с групповыми кодами//Радиотехника и электроника.— 1985.— № 12.— С. 2391—2394.
10. **Зюко А.Г., Фалько А.И., Панфилов И.П.** и др. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации.— М.: Радио и связь, 1985.— 272 с.

Получено после доработки 10.12.09