УДК 621.391

СИНТЕЗ РЕКУРРЕНТНЫХ ФИЛЬТРОВ СКОЛЬЗЯЩЕГО ОКНА В БАЗИСАХ ФУНКЦИЙ ВИЛЕНКИНА-КРЕСТЕНСОНА

В. П. Волчков, профессор МТУСИ, д.т.н.; volchkovvalery@mail.ru,
А. М. Шлома, профессор МТУСИ, д.т.н.; alremizov@yandex.ru

Приведен синтез рекуррентных цифровых *m*-фильтров скользящего окна произвольного динамического порядка, согласованных с базисом функций Виленкина-Крестенсона. Предлагаемый фильтр является многоканальным, т.е. приспособленным к рекуррентной обработке не только скалярных, но и векторных сигналов. Показано, что данные фильтры допускают эффективную вычислительную реализацию и хорошо аппроксимируют желаемую амплитудно-частотную характеристику (АЧХ).

***Ключевые слова**: цифровой m-фильтр, рекуррентный фильтр, БИХ-фильтр, фильтрация сигналов, векторные сигналы, обработка изображений, функции Виленкина-Крестенсона, m-корреляционная матрица.*

Введение. Синтез специальных цифровых m-фильтров позволяет вести рекуррентную многоканальную обработку сигнала в пределах скользящего временного (или пространственного) окна с заданными АЧХ. По сути дела, такой фильтр совмещает известные достоинства КИХ- и БИХ-фильтров — простоту синтеза, относительно небольшой объем памяти и возможность быстрой вычислительной реализации. Но при этом предлагаемый m-фильтр многоканален, т.е. приспособлен к рекуррентной обработке не только скалярных, но и векторных сигналов, например, к построчной обработке изображений и др.

Главная особенность таких фильтров — специальная структура матричных параметров, согласованная с базисом функций Виленкина-Крестенсона (ВКФ), позволяющая, с одной стороны, упростить процедуру их оптимального синтеза, а с другой, обеспечить эффективную вычислительную реализацию. Причем, в отличие от аналогичных рекуррентных фильтров первого порядка [1], мы обобщаем их на произвольный динамический порядок p, что позволяет улучшить АЧХ и расширить область применения.

Формулировка задачи и ее решение. Во временной области рекуррентный цифровой m-фильтр скользящего окна p-го порядка, согласованный с базисом ВКФ, представляется в виде векторной динамической системы специального вида:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{A}_1\mathbf{z}_{k-1} + \mathbf{A}_1\mathbf{z}_{k-2} + \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{z}_{k-p} + \mathbf{G}\mathbf{s}_k, \quad k \in J_M = \{0, 1, \ldots, M-1\}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{A}_\mu = (A_\mu(i \overset{m}{\ominus} j))$, $\mathbf{G} = (G(i \overset{m}{\ominus} j))$ ($\overset{m}{\ominus}$ символ поразрядного вычитания по модулю m) — вещественные матрицы размерности $n \times n$, имеющие блочно-циркулянтную структуру вида:

$$\mathbf{A}_\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mu,0} & \mathbf{A}_{\mu,q-1} & \cdots & \mathbf{A}_{\mu,1} \\ \mathbf{A}_{\mu,1} & \mathbf{A}_{\mu,0} & \cdots & \mathbf{A}_{\mu,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{\mu,q-1} & \mathbf{A}_{\mu,q-2} & \cdots & \mathbf{A}_{\mu,0} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{\mu,l} = \begin{pmatrix} a^{(0)}_{\mu,l} & a^{(m-1)}_{\mu,l} & \cdots & a^{(1)}_{\mu,l} \\ a^{(1)}_{\mu,l} & a^{(0)}_{\mu,l} & \cdots & a^{(2)}_{\mu,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{(m-1)}_{\mu,l} & a^{(m-2)}_{\mu,l} & \cdots & a^{(0)}_{\mu,l} \end{pmatrix}, \ \mu = 1, \ldots, p, \tag{2}$$

где $n = m^\alpha$ ($\alpha, m \neq 1$ — целые положительные числа); $q = n/m$ — число различных циркулянтно чередующихся блоков $\mathbf{A}_{\mu,0}, \ldots, \mathbf{A}_{\mu,q-1}$, каждый из которых является циркулянтной вещественной матрицей размерности $m \times m$; собственные числа матриц $\mathbf{A}_\mu$ лежат внутри единичного круга; $\mathbf{z}_k, \mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^n$, т.е. на вход фильтра (1) подается векторный сигнал $\{\mathbf{s}_k,\, k \in I_M\}$, а на выходе формируется векторный сигнал $\{\mathbf{z}_k,\, k \in J_M\}$.

Предполагается, что каждый вектор

$$\mathbf{s}_k = (s_k^{(0)}, s_k^{(1)}, \ldots, s_k^{(n-1)})^T = (s_{i_k}, s_{i_k+1}, \ldots, s_{i_k+n-1})^T$$

составлен из значений скалярного сигнала $\{s(i),\, i \in J_N\}$ в скользящем временном окне

$$\Delta_k = \{i_k, i_k+1, \ldots, i_k+n-1,\} \subseteq I_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}, \quad i_k = (n-\nu)k, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $N = m^{\alpha_o}$ ($\alpha_o \geq \alpha$). При этом окна (кадры) $\{\Delta_k,\, k \in J_M\}$ могут пересекаться с параметром зацепления $0 \leq \nu \leq n-1$, показывающим сколько общих элементов у соседних векторов $\mathbf{s}_k$ и $\mathbf{s}_{k+1}$. Аналогичная структура будет и у выходных векторов $\mathbf{z}_k$. Поэтому до начала фильтрации следует представить входной сигнал $\{s(i),\, i \in J_N\}$ в виде последовательности векторов $\{\mathbf{s}_k,\, k \in J_M\}$ с форматом скользящего окна (кадра) (3), а после фильтрации, если это необходимо, выполнить обратное преобразование выходной последовательности $\{\mathbf{z}_k,\, k \in I_M\}$ в скалярный сигнал $\{z(i),\, i \in J_N\}$.

На практике реальный сигнал, который мы хотим обрабатывать с помощью m-фильтра скользящего окна, может быть не только скалярным, но и векторным. Поэтому до начала фильтрации его следует реформировать в соответствии со структурой фильтра (1). В общем случае, данное преобразование сигнала можно условно разделить на два этапа. Сначала выстраиваем все его элементы друг за другом в одну скалярную последовательность $\{s(i),\, i \in I_N\}$ размера N, а затем реформируем ее в последовательность векторов $\{\mathbf{s}_k,\, k \in I_M\}$ с форматом скользящего окна (3). Если исходный сигнал — скалярный, то первый этап можно опустить. Если сигнал — векторный, (например, состоит из векторов-столбцов некоторой матрицы элементов изображения) и необходимо фильтровать его по тем же столбцам без внесения перекрытия ($\nu = 0$), то оба этапа можно пропустить. Во всех остальных случаях следует использовать оба этапа дофильтрового преобразования исходного сигнала. После фильтрации следует выполнить обратное структурное преобразование выходной последовательности $\{\mathbf{z}_k, k \in I_M\}$ в векторный сигнал исходного формата.

Отметим, что параметр ν позволяет гибко управлять процедурой фильтрации в зависимости от типа решаемой задачи. Например, если важно обеспечить только сглаживание данных «от кадра к кадру», то следует положить $\nu = 0$; если нужно дополнительное сглаживание в пределах каждого кадра, то $\nu \geq 1$.

В частном случае, когда $\nu = 0, M = 1, p = 0,$ получаем $N = n$, $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{0}$ — вариант нерекуррентного КИХ-фильтра [2]. Если $\alpha_o \to \infty$, то $N, M \to \infty$, а уравнение (1) определяет БИХ-фильтр скользящего окна на дискретном бесконечном интервале $J_\infty = \{0,1,2,\ldots\}$, который при $\alpha = 0$, $n = 1$ превращается в обычный БИХ-фильтр. Специальная блочная структура (2) матриц $\mathbf{A}_\mu$ и $\mathbf{G}$ обеспечивает их диагонализацию после соответствующего разложения в базисе ВКФ [3], а значит и быструю вычислительную реализацию фильтра (1).

Пусть теперь задана некоторая АЧХ $K_ж(f), f \in [-F, F]$, определяемая как модуль соответствующего комплексного коэффициента передачи желаемого фильтра. Тогда, автокорреляционная функция дискретной ИХ желаемого фильтра

$$B(\tau) = \int_{-F}^{F} K_ж^2(f)\exp(j2\pi f\delta_t\tau)\,df,\ \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (4)$$

где $\delta_t = 1/2F$ — частота дискретизации по времени. Используя (3), применим к последовательности $\{B(\tau)\}$ процедуру разбиения на кадры и определим на них систему корреляционных функций и матриц для ИХ желаемого фильтра

$$B_k(\tau) = B((n-\nu)k + \tau),\ \tau \in J_n,\ k = 0,1,2,\ldots; \qquad (5)$$

$$\mathbf{B}_k \triangleq (B_k\,|\,i-j\,|), i, j \in I_n,\ k = 0,1,2,\ldots, \qquad (6)$$

где $J_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$. В силу четности $B(\tau) = B(-\tau)$ отрицательные временные сдвиги не рассматриваются. Отметим, что корреляционная функция (4) эквивалентна любой из систем (5), (6), так как процедура перехода от (4) к формату скользящего окна (5) взаимнооднозначна.

Рассмотрим теперь выход $\mathbf{z}_k$ фильтра (1) в разные моменты времени $k = 0,1,2,\ldots$, подав на его вход векторный белый шум $\{\mathbf{e}_k\}$ с параметрами $\mathrm{M}[\mathbf{e}_l] = 0$, $\mathrm{M}[\mathbf{e}_l\mathbf{e}_{l+k}^T] = \mathbf{I}\,\delta(k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, ($\delta(\cdot)$ — функция Кронекера).

Нетрудно убедиться, что система ковариационных матриц $\mathbf{R}_k = \mathrm{M}[\mathbf{z}_l\mathbf{z}_{l+k}^T]$, $k = 0,1,2,\ldots$, выходного сигнала будет иметь блочно-циркулянтную структуру вида (2), согласованную с базисом ВКФ (обозначим множество всех таких матриц через Ω). Матрицы $\mathbf{R}_k$ зависят от параметров фильтра $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_p$, $\mathbf{G}$ и по смыслу совпадают с корреляционными матрицами ИХ фильтра (1) в формате скользящего окна (3).

Задача синтеза рекуррентного фильтра (1) по заданной АЧХ $K_ж(f)$ может быть конкретизирована следующим образом. Требуется найти оптимальные значения параметров $\hat{\mathbf{A}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{A}}_p$, $\hat{\mathbf{G}}$, при которых удовлетворяется критерий качества

$$(\hat{\mathbf{A}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{A}}_p,\hat{\mathbf{G}}) : \varepsilon_k^2 \triangleq \|\,\mathbf{B}_k - \mathbf{R}_k\,\|_F^2 \to \min_{\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_p,\mathbf{G}\in\Omega}, \quad k = 0,1,\ldots,p. \qquad (7)$$

Очевидно, чем меньше ошибки ε_k^2, тем меньше различие между корреляционными характеристиками желаемого и рекуррентного фильтра (1). Решая экстремальную задачу (7) методом, аналогичным описанному в [4], получим

$$(\hat{\mathbf{A}}_1\ldots\hat{\mathbf{A}}_p) = (\boldsymbol{\Gamma}_1^T\ldots\boldsymbol{\Gamma}_p^T)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_0 & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{p-1}^T\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_0\end{pmatrix}^{-1};$$
$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{Q}^{1/2},\ \ \mathbf{Q} = \boldsymbol{\Gamma}_0 - (\hat{\mathbf{A}}_1\ldots\hat{\mathbf{A}}_p)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\Gamma}_p\end{pmatrix}; \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = \mathbf{B}_k^{(m)} = \mathbf{W}\mathrm{Diag}(\mathbf{W}^H\mathbf{B}_k\mathbf{W})\mathbf{W}^H,\ k = 0,1,2,\ldots,p. \qquad (9)$$

В этом выражении $\mathbf{W} = \left((1/\sqrt{n})\,\mathrm{Had}(\mu,\tau)\right)$, $\mu,\tau \in J_n$ — унитарная матрица, составленная из нормированных значений ВКФ $\mathrm{Had}(\mu,\tau)$ [3]; $\mathrm{Diag}(\mathbf{A})$ — диагональная матрица, составленная из элементов главной диагонали матрицы $\mathbf{A}$; H — символ эрмитового сопряжения.

Рекуррентный m-фильтр (1) с параметрами $\hat{\mathbf{A}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{A}}_p$, $\hat{\mathbf{G}}$ принимает вид:

$$\mathbf{z}_k = \hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{z}_{k-1} + \hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{z}_{k-2} + \ldots + \hat{\mathbf{A}}_p\mathbf{z}_{k-p} + \hat{\mathbf{G}}\mathbf{s}_k,\ k = 0,1,2\ldots, \qquad (10)$$

и обеспечивает наилучшее приближение к АЧХ $K_ж(f), f \in [-F, F]$ желаемого фильтра. Чем больше динамический порядок фильтра p, тем больше матричных параметров $\hat{\mathbf{A}}_\mu$, а значит и корреляционных матриц $\mathbf{B}_k$, участвуют в этом приближении.

Важно отметить, что параметры фильтра (10) не зависят от N, т.е. длины временного интервала $J_N = \{0,1,\ldots,N-1\}$, на котором определялся скалярный входной сигнал $\{s(i), i \in J_N\}$. Поэтому формулы (8) справедливы для любых значений N, т.е. описывают структуру рекуррентного БИХ-фильтра скользящего окна.

Вычислительная реализация. Покажем, что полученный оптимальный фильтр допускает быструю вычислительную реализацию. Для этого осуществим линейное унитарное преобразование ВКФ над векторами входного и выходного сигналов

$$\mathbf{z}_{*k} = \mathbf{W}^H\mathbf{z}_k,\ \mathbf{s}_{*k} = \mathbf{W}^H\mathbf{s}_k.$$

Тогда, с учетом свойства унитарности $\mathbf{W}\mathbf{W}^H = \mathbf{I}$, фильтр (10) преобразуются к виду:

$$\mathbf{z}_{*k} = \hat{\mathbf{A}}_{*1}\mathbf{z}_{*k-1} + \hat{\mathbf{A}}_{*2}\mathbf{z}_{*k-2} + \ldots + \hat{\mathbf{A}}_{*p}\mathbf{z}_{*k-p} + \mathbf{G}_*\mathbf{s}_{*k},\ k = 1,2,\ldots; \qquad (11)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{*\mu} = \mathbf{W}^H\hat{\mathbf{A}}_\mu\mathbf{W},\ \hat{\mathbf{G}}_* = \mathbf{W}^H\hat{\mathbf{G}}\mathbf{W},\ \mu = 1,2,\ldots,p, \qquad (12)$$

где матрицы $\hat{\mathbf{A}}_{*\mu}, \hat{\mathbf{G}}_*$ — диагональные. Таким образом, после перехода в спектральную область ВКФ рекуррентный фильтр представляется в канонической форме (11), требующей минимального числа вещественных умножений $L = 4(p+1)n$ на один рекуррентный пересчет. В частности, если $m = 2$, а сигнал $\mathbf{s}_k$ вещественный, то $\sqrt{n}\,\mathbf{W}$ — матрица Уолша, состоящая только из элементов ± 1; все матрицы $\hat{\mathbf{A}}_{*\mu}, \hat{\mathbf{G}}_*$ — вещественные диагональные, а число умножений уменьшается 4 раза. При этом перевод сигнала в спектральную область также предельно упрощается.

Сравнительный анализ характеристик фильтров. Ниже в качестве примера исследуется работа рекуррентного m-фильтра скользящего окна, синтезированного в базисах дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) и Уолша. Для сравнения рассматривались фильтры с динамическим порядком $p = 3$ и $p = 4$, с размерами скользящего окна $n = 4$ или $n = 1$ и разными параметрами зацепления ν.

Напомним, что базисы ДЭФ и Уолша являются частными представителями базисов ВКФ и отвечают значениям $m = n$ и $m = 2$, соответственно (см. описание модели (1)). Им соответствуют унитарные матрицы дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и Уолша, имеющие вид:

$$\mathbf{W} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left(j\frac{2\pi hw}{n}\right)\right), \ h,w = 1,\ldots,n; \quad \text{(базис ДЭФ)};$$

$$\mathbf{W} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k} h_{k+1-i} w_i}\right), \quad k = \log_2(n), \ \text{(базис Уолша)},$$

где h_i, w_i — i-е разряды двоичного представления чисел h и w, соответственно.

В рассматриваемом примере предполагается, что входной сигнал — скалярная последовательность $\{s(i), i \in J_N\}$, полученная в результате дискретизации по времени некоторого непрерывного вещественного сигнала $s(t)$. Поэтому перед подачей на вход фильтра (1) этот сигнал преобразуется в последовательность векторов $\{\mathbf{s}_k, k \in J_M\}$ с форматом скользящего окна (3). В качестве желаемой АЧХ фильтра выбрана трехмодальная характеристика, квадрат которой описывается выражением:

$$K_ж^2(f) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k f_{ok}^2 / [\pi^2(f^2 - f_{ok}^2)^2 + \alpha^2 f^2],$$

где $f_{ok} = (1/2\pi)\sqrt{\alpha_k^2 + w_1^2}$, $w_k = 2\pi f_k$, $f_1 = 31$, $f_2 = 59$, $f_3 = 90$, $\alpha_1 = 49{,}87$, $\alpha_2 = 68{,}54$, $\alpha_3 = 84{,}53$, $\delta_t = 1/2F$, $F = 126$ и изображен на рис. 1 и 2 в виде кривой $\mathrm{K}(k) = K_ж^2(k\delta_f)$, $k \in J_N$. Здесь $\delta_f = 1/(N\delta_t)$ — интервал дискретизации по частоте; $N = 64$. Дискретная корреляционная функция ИХ желаемого фильтра определяется формулой (4) и описывается выражением

$$B(\tau) = \sum_{k=1}^{3} exp\left(-\alpha_k \delta_t |\tau|\right) \times$$
$$\times\left(\cos\left(2\pi f_{ok}\delta_t \tau\right) + \frac{\alpha_k}{2\pi f_k}\sin\left(2\pi f_{ok}\delta_t \,|\,\tau\,|\right)\right), \ \tau = 0,\ldots,N-1.$$

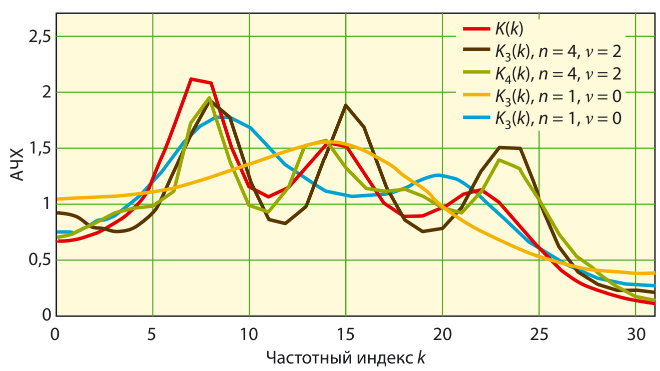

Рис. 1. **Фильтр скользящего окна в базисе ДЭФ**

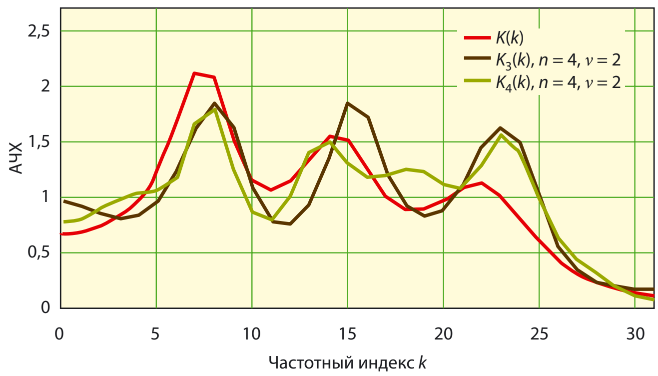

Рис. 2. **Фильтр скользящего окна в базисе Уолша**

Оптимальные параметры рекуррентных фильтров 3-го и 4-го порядков для разных значений n и ν, указанных на графиках, рассчитывались по формулам (8). Корреляционные матрицы ИХ этих фильтров являются m-циркулянтными и описываются выражением (9). Учитывая структуру скользящего окна (3), для разных динамических порядков p по формулам (5), (6) однозначно записываются соответствующие корреляционные функции $B_{0p}(\tau)$ ИХ фильтров на интервале времени $J_N = \{0,1,\ldots,N-1\}$. В результате квадраты АЧХ синтезированных фильтров на дискретном интервале J_N будут определяться выражениями:

$$\mathrm{K_p}(k) = \sum_{\tau=0}^{N-1} B_{0\mathrm{p}}(\tau)\exp\left(-j\frac{2\pi\tau k}{n}\right),$$
$$k \in \{0,\ldots,N-1\}, \ p = 3; 4. \qquad (13)$$

Теоретические кривые, рассчитанные по (13) для разных значений p, n, ν представлены на рис. 1 и 2. Отметим, что при $n = 1$, $\nu = 0$ рекуррентный векторный фильтр (1) превращается в обычный скалярный БИХ-фильтр соответствующего порядка. Выбор пары значений n, ν в остальных случаях, приведенных на графиках (процедура идентификации модели), проводился из условия минимизации суммарной ошибки $\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{k=0}^{p}\varepsilon_k^2$, где ε_k^2 определяется выражением (7).

Заключение. Сравнительный анализ кривых на рис. 1 и 2 дает возможность сделать следующие выводы.

1. Известные скалярные БИХ-фильтры 3-го и 4-го порядка ($n = 1$, $\nu = 0$) не позволяют адекватно аппроксимировать желаемую АЧХ. В частности, трехмодальность кривой $\mathrm{K}(k)$ не может быть отражена ни одним из этих фильтров.

2. В то же время, рекуррентные m-фильтры скользящего окна 3-го порядка в базисах ДЭФ и Уолша с размером окна $n = 4$ и параметром зацепления $\nu = 2$ хорошо воспроизводят трехмодальный вид желаемой АЧХ.

3. Несмотря на практически одинаковое качество аппроксимации желаемой АЧХ, рекуррентный фильтр в базисе Уолша обладает более простой вычислительной реализацией и поэтому оказывается предпочтительнее.

Следует также отметить, что с ростом динамического порядка p аппроксимирующие свойства всех сравниваемых рекуррентных фильтров увеличиваются. Однако при использовании m-фильтров для достижения одного и того же качества аппроксимации желаемой АЧХ требуется меньшее значение p.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волчков В. П**. Синтез рекуррентных m-фильтров с заданной амплитудно-частотной характеристикой // Научные ведомости Белгородского госуниверситета. Сер. Информатика и прикладная математика.— Белгород: Изд-во БелГу, 2006.— Вып. 3, № 2 (31).— С. 195—201.
2. **Волчков В. П**. Фидуциальное оценивание m-стационарных гауссовских случайных процессов // Радиотехника и электроника.— 1997.— Т. 42, № 2.— С. 150—160.
3. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.— М.: Сов.радио, 1975.— 208 с.
4. **Волчков В. П., Поборчая Н. Е**. Представление случайных процессов векторной рекуррентной циркулянтной моделью второго порядка // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал ИРЭ РАН), № 12, 2013. URL: http://jre.cplire.ru/jre/dec13/14/text.pdf

Получено 03.02.14

УДК 621. 395

АНАЛИЗ РАБОТЫ КОМПЕНСАТОРА ИСКАЖЕНИЙ КАМ-СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ АДДИТИВНОГО ШУМА

Н. Е. Поборчая, доцент МТУСИ, к.т.н.; n.poborchaya@mail.ru

Проведен анализ работы компенсатора искажений QAM-сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного шума. Проведено сравнение двух алгоритмов компенсации (вариационного алгоритма и процедуры нелинейной фильтрации) при разных моделях фазовых шумов и шумов наблюдений по точности и вероятности ошибки на символ, достигаемой при приеме сигнала после компенсации. Вычислительный эксперимент показал, что синтезированные алгоритмы устойчивы к отклонению закона распределения шума наблюдения от гауссовского.

Ключевые слова: *оценка, выборка, нелинейная фильтрация, регуляризующий алгоритм, модифицированный метод наименьших квадратов, компенсатор искажений, негауссовский шум.*

Введение. Процедуры компенсации искажений, не связанные с видом тестовой последовательности, позволяют оценивать параметры по детектируемым информационным символам. Неизвестные параметры всегда определяют при наличии фазового шума. Для того чтобы провести компенсацию искажений сигнала, необходимо сначала определить его параметры и амплитудно-фазовый разбаланс между квадратурной и синфазной компонентами. Таким образом, задача сводится к оценке параметров случайного процесса на фоне шума.

Синтез алгоритмов рассмотрим на примере компенсации искажений сигнала квадратурной амплитудной модуляции (КАМ, M-QAM), наблюдаемого на фоне аддитивного негауссовского белого шума. Предлагаются два подхода: метод нелинейной фильтрации и вариационный алгоритм [1, 2].

Постановка задачи. Рассмотрим КАМ-сигнал $\mathbf{z}_i = \mathbf{S}_i(\Theta_i)$, наблюдаемый на фоне шума μ_i:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i + \mu_i.$$

Здесь $i = \overline{1,m}$ — дискретное время, $m = T_0 / \Delta t$, T_0 — время наблюдения, Δt — интервал дискретизации; $\Theta_i = \left(a_{1i} \ \cdots \ a_{pi} \ \ \varphi_i \ \ \Delta f_i \ \ \gamma_i \ \ \Delta\varphi_i \ \ b_{ci} \ \ b_{si}\right)^T$ — вектор оцениваемых параметров («T» — оператор транспонирования); $\mathbf{y}_i = (y_{is} \ y_{ic})^T$, $\mu_i = (\mu_{is} \ \mu_{ic})^T$; $\mathbf{S}_i(\bullet) = (z_{is} \ z_{ic})^T$ — нелинейная вектор-функция. Она описывается квадратурными компонентами сигнала z_{is}, z_{ic} [3, 4]:

$$z_{is} = \gamma_i A \sum_{k=1}^{i} g(\Delta t i - kT - \tau_i)(I_{kq} \sin(\vartheta_{ik} + \Delta\varphi_i) + \\ + J_{kr} \cos(\vartheta_{ik} + \Delta\varphi_i)) + b_{si};$$

$$z_{ic} = A \sum_{k=1}^{i} g(\Delta t i - kT - \tau_i)(I_{kq} \cos(\vartheta_{ik}) - J_{kr} \sin(\vartheta_{ik})) + b_{ci},$$

где $\vartheta_{ik} = \Delta\omega_i(\Delta t i - \tau_i) + \varphi_i$, φ_i — случайная фаза, образованная фазами генераторов на передающей и приемной стороне, а также задержкой в канале распространения; τ_i — задержка сигнала, возникающая при работе генератора тактовой синхронизации; $\Delta\omega_i = 2\pi\Delta f_i$, Δf_i — частота, оставшаяся от снятия несущей.

Параметры $\gamma_i, \Delta\varphi_i$ представляют собой разбаланс по амплитуде и фазе, соответственно; b_{ci}, b_{si} — медленно меняющиеся «постоянные» составляющие квадратурных компонент сигнала;

$I_{kq} = (2q - 1 - \sqrt{M})d$, $J_{kr} = (2r - 1 - \sqrt{M})d$ — информационные амплитуды, принимающие дискретные значения, $q, r = \overline{1:\sqrt{M}}$, $2d$ — расстояние между соседними амплитудами; A — амплитуда сигнала;

$(m_1 - 1)T \le \Delta t i - \underline{\tau_i} \le m_1 T$, T — длительность символа $I_k(J_k)$, (J_k), $m_1 = \overline{1,n}$, $n = T_0 / T$; $a_{1i}, \cdots a_{pi}$ — амплитуды основного импульса сигнала и $p - 1$ «хвостов» прошлых импульсов в i-й момент времени, полученных в результате межсимвольной интерференции;

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T} \frac{\cos(\beta\pi t / T)}{1 - 4\beta^2 t^2 / T^2}$$

— импульсная характеристика (ИХ) канала, частотная характеристика которого имеет вид «приподнятого косинуса»; $\beta \in [0;1]$ — коэффициент ската.